Formalismo termodinámico y teoría de la dimensión: Dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Borel–Bernstein

Felipe Pérez

Pontificia Universidad Católica de Chile

12th May 2018

Fracciones Continuas

Todo número $x \in [0,1]$ admite una expansión decimal de la forma

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

donde $a_i \in \{0, ..., 9\}$. De manera similar, cada número $x \in [0,1]$ admite una expansión de la forma

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{...}}}}$$

donde $a_i \in \mathbb{N}$. En este caso, denotaremos $x = [a_1, a_2, a_3, ...]$. Si x es irracional, la expansión es única.

Fracciones Continuas

Todo número $x \in [0, 1]$ admite una expansión decimal de la forma

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

donde $a_i \in \{0, ..., 9\}$. De manera similar, cada número $x \in [0, 1]$ admite una expansión de la forma

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{...}}}}$$

donde $a_i \in \mathbb{N}$. En este caso, denotaremos $x = [a_1, a_2, a_3, ...]$. Si x es irracional, la expansión es única.

Si $x = [a_1, a_2, ...]$, definimos su **n-ésimo aproximante** como el racional

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_1, ..., a_n].$$

Para $b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}$, definimos también los cilindros

$$I(b_1, ..., b_n) = \{x :\in [0, 1] : \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [b_1, ..., b_n]\}.$$

Si $x = [a_1, a_2, ...]$, definimos su **n-ésimo aproximante** como el racional

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_1, ..., a_n].$$

Para $b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}$, definimos también los cilindros

$$I(b_1, ..., b_n) = \{x :\in [0,1] : \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [b_1, ..., b_n]\}.$$

Teorema de Borel–Bernstein, [1], [2]

Theorem (Borel–Bernstein, 1912).
Sea $\phi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$*, entonces*

$$E(\phi) = \{x :\in [0,1] : a_n \geq \phi(n) \ \textit{i.o.}\}$$

tiene medida de Lebesgue 0 *si* $\sum \frac{1}{\phi(n)} < \infty$ *y* 1 *si* $\sum \frac{1}{\phi(n)} = \infty$.

Para $B > 1$, definimos

$$E(B) = \{x :\in [0,1] : a_n \geq B^n \ \text{i.o.}\}.$$

Tomando $\phi(n) = B^n$, se concluye que $E(B)$ tiene medida de Lebesgue 0 para cada $B > 1$.

Teorema de Borel-Bernstein, [1], [2]

Theorem (Borel-Bernstein, 1912).
Sea $\phi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$*, entonces*

$$E(\phi) = \{x :\in [0,1] : a_n \geq \phi(n) \ \textit{i.o.}\}$$

tiene medida de Lebesgue 0 *si* $\sum \frac{1}{\phi(n)} < \infty$ *y* 1 *si* $\sum \frac{1}{\phi(n)} = \infty$*.*

Para $B > 1$, definimos

$$E(B) = \{x :\in [0,1] : a_n \geq B^n \ \text{i.o.}\}.$$

Tomando $\phi(n) = B^n$, se concluye que $E(B)$ tiene medida de Lebesgue 0 para cada $B > 1$.

El Problema

Dado que la medida de $E(B)$ es cero para cada $B > 1$, necesitamos otra forma de medir su complejidad. Estamos interesados en estudiar la regularidad de la función

$$D : (1, \infty) \to (0, 1)$$
$$B \mapsto \dim_H E(B).$$

En su trabajo, Wang y Wu [5] probaron

Theorem (Wang-Wu, 2008).

La función D es continua y satisface

- $\lim_{B \to 1} D(B) = 1$,
- $\lim_{B \to \infty} D(B) = 1/2$.

El Problema

Dado que la medida de $E(B)$ es cero para cada $B > 1$, necesitamos otra forma de medir su complejidad. Estamos interesados en estudiar la regularidad de la función

$$\begin{aligned} D : (1,\infty) &\to (0,1) \\ B &\mapsto \dim_H E(B). \end{aligned}$$

En su trabajo, Wang y Wu [5] probaron

Theorem (Wang–Wu, 2008).

La función D es continua y satisface

- $\lim_{B\to 1} D(B) = 1$,
- $\lim_{B\to\infty} D(B) = 1/2$.

Teorema Principal

Theorem.

La función $D : B \mapsto \dim_H E(B)$ *definida en el intervalo* $(1, \infty)$ *satisface las siguientes propiedades:*

- *Es estrictamente decreciente,*
- *Es convexa,*
- $\lim_{B \to 1} D(B) = 1$,
- $\lim_{B \to \infty} D(B) = 1/2$,
- *Es real analítica.*

Formalismo Termodinámico

Consideremos el mapeo de Gauss:

$$G : [0,1) \to [0,1)$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

G actúa como shift en la expansión en fracciones continuas de x:

$$x = [x_1, x_2, x_3, \ldots], \text{ entonces } Gx = [x_2, x_3, x_4, \ldots]$$

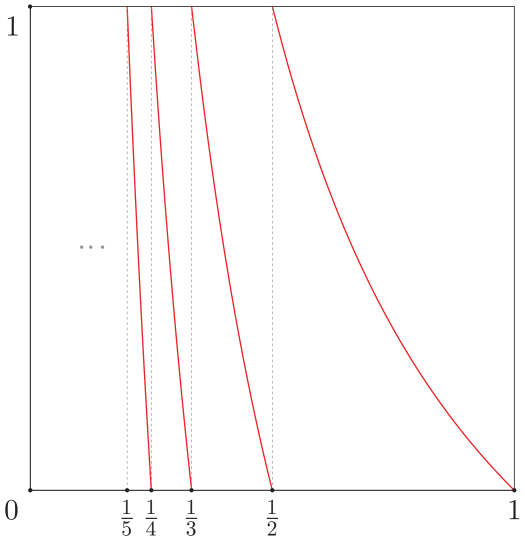

Figure: Gráfico del mapeo de Gauss.

Para $t \in [0, \infty)$ definimos la función presión

$$P(t) = \lim_n \frac{1}{n} \log \sum_{a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}} |(G^n)'(x)|^{-t},$$

donde $x = [a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots]$.

Theorem (Walters, Mayer).

Para $t \in [0, \infty)$, la presión de $P(t)$ se puede calcular como

$$P(t) = \sup\{h_\mu(G) + \int -t \log |G'| d\mu\},$$

*donde el supremo se toma sobre todas las medidas invariantes para G. Una medida que alcanza el máximo se dice **medida de equilibrio** para $P(t)$.*

Para $t \in [0, \infty)$ definimos la función presión

$$P(t) = \lim_n \frac{1}{n} \log \sum_{a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{N}} |(G^n)'(x)|^{-t},$$

donde $x = [a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots]$.

Theorem (Walters, Mayer).

Para $t \in [0, \infty)$, la presión de $P(t)$ se puede calcular como

$$P(t) = \sup\{h_\mu(G) + \int -t \log |G'| d\mu\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las medidas invariantes para G. Una medida que alcanza el máximo se dice ***medida de equilibrio*** *para $P(t)$.*

La presión puede ser aproximiada por la presión del mapeo restringido a subcojuntos compactos invariantes. En efecto

Theorem (Aproximación).

Para cada $t \in [0, \infty)$*, entonces*

$$P(t) = \sup\{P_K(t) : K \subset (0,1) : K \text{ compacto e invariante}\}.$$

La presión puede ser aproximiada por la presión del mapeo restringido a subcojuntos compactos invariantes. En efecto

Theorem (Aproximación).

Para cada $t \in [0, \infty)$*, entonces*

$$P(t) = \sup\{P_K(t) : K \subset (0,1) : K \text{ compacto e invariante}\}.$$

Decimos que una medida μ_t tiene la propiedad de **Gibbs** para $P(t)$ si existe una constante $k > 0$ tal que para todo $x \in I(a_1, ..., a_n)$ se tiene que

$$k^{-1} \leq \frac{\mu_t(I(a_1, ..., a_n))}{|B^n(G^n)'(x)|^{-t} \exp(-nP(t) + nt \log B)} \leq k.$$

Las propiedades de la función $P(t)$ fueron extensivamente estudiadas por Mayer [3], [4] Decimos que una medida μ_t tiene la propiedad de **Gibbs** para $P(t)$ si existe una constante $k > 0$ tal que para todo $x \in I(a_1, ..., a_n)$ se tiene que

$$k^{-1} \leq \frac{\mu_t(I(a_1, ..., a_n))}{|B^n(G^n)'(x)|^{-t} \exp(-nP(t) + nt \log B)} \leq k.$$

Las propiedades de la función $P(t)$ fueron extensivamente estudiadas por Mayer [3], [4]

Theorem (Mayer, [3], [4]).

La función

$$\begin{aligned} P : [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto P(t) \end{aligned}$$

cumple las siguientes propiedades:

- *Es infinita para* $t \in [0, 1/2]$ *y finita para* $t \in (1/2, \infty)$*.*
- *Es analítica real en* $(1/2, \infty)$*.*
- *Es decreciente y convexa en* $(1/2, \infty)$*.*
- *Para cada* $t \in (1/2, \infty)$*, existe una medida de equilibrio* μ_t *que cumple la propiedad de Gibbs.*

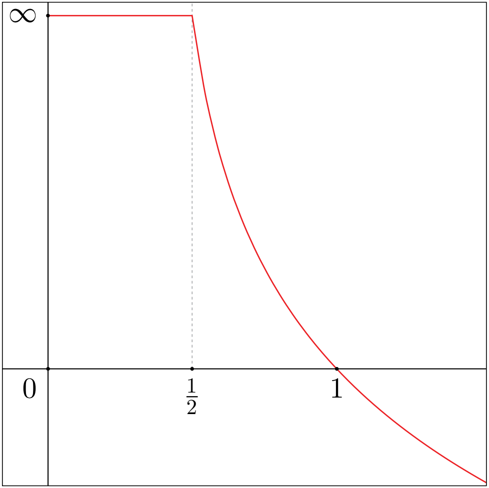

Figure: Gráfico de la función presión.

Dimensión de Hausdorff

Para $d \geq 0$ y $A \subset \mathbb{R}$, definimos la **medida $d-$dimensional de Hausdorff** por

$$\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{\mathcal{U}} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\mathrm{diam}\ U)^d,$$

donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de A con diam $\mathcal{U} \leq \delta$.
Es posible observar que $\mathcal{H}^d$ es decreciente en d, con lo que es posible definir la **dimensión de Hausdorff** de A como

$$\dim_H(A) = \inf\{d : \mathcal{H}^d(A) = 0\}.$$

Dimensión de Hausdorff

Para $d \geq 0$ y $A \subset \mathbb{R}$, definimos la **medida** $d-$**dimensional de Hausdorff** por

$$\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{\mathcal{U}} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\mathrm{diam}\ U)^d,$$

donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de A con diam $\mathcal{U} \leq \delta$. Es posible observar que $\mathcal{H}^d$ es decreciente en d, con lo que es posible definir la **dimensión de Hausdorff** de A como

$$\dim_H(A) = \inf\{d : \mathcal{H}^d(A) = 0\}.$$

Teorema principal

Theorem.

La dimensión de Hausdorff del conjunto $E(B)$ *corresponde al único número* $s_B \in (0,1)$ *tal que*

$$P(s_B) = s_B \log B. \tag{1}$$

Del teorema y las propiedades de la función $P(t)$, obtenemos como corolario:

Theorem.

La función $B \mapsto \dim_H E(B)$ *definida en el intervalo* $(1, \infty)$ *satisface las siguientes propiedades:*

- *Es real analítica,*
- *Es estrictamente decreciente,*
- $\lim_{B \to 1} \dim_H E(B) = 1$*,*
- $\lim_{B \to \infty} \dim_H E(B) = 1/2$*.*

Del teorema y las propiedades de la función $P(t)$, obtenemos como corolario:

Theorem.

La función $B \mapsto \dim_H E(B)$ *definida en el intervalo* $(1, \infty)$ *satisface las siguientes propiedades:*

- *Es real analítica,*
- *Es estrictamente decreciente,*
- $\lim_{B \to 1} \dim_H E(B) = 1$,
- $\lim_{B \to \infty} \dim_H E(B) = 1/2$.

Demostración del Teorema

La demostración se divide en tres partes. En la primera parte, mostramos que la expresión de Wang y Wu para $\dim_H E(B)$ satisface la ecuación

$$P(t) = t \log B.$$

De esta forma, se concluye que la función $B \mapsto \dim_H E(B)$ tiene la regularidad pedida. La segunda y tercera parte demuestran directamente que la única solución s_B de la ecuación

$$P(t) = t \log B$$

es igual a $\dim_H E(B)$.

Demostración del Teorema

La demostración se divide en tres partes. En la primera parte, mostramos que la expresión de Wang y Wu para $\dim_H E(B)$ satisface la ecuación

$$P(t) = t \log B.$$

De esta forma, se concluye que la función $B \mapsto \dim_H E(B)$ tiene la regularidad pedida. La segunda y tercera parte demuestran directamente que la única solución s_B de la ecuación

$$P(t) = t \log B$$

es igual a $\dim_H E(B)$.

Demostración del Teorema

La demostración se divide en tres partes. En la primera parte, mostramos que la expresión de Wang y Wu para $\dim_H E(B)$ satisface la ecuación

$$P(t) = t \log B.$$

De esta forma, se concluye que la función $B \mapsto \dim_H E(B)$ tiene la regularidad pedida. La segunda y tercera parte demuestran directamente que la única solución s_B de la ecuación

$$P(t) = t \log B$$

es igual a $\dim_H E(B)$.

Primera parte

Más precisamente, Wang y Wu probaron que

Theorem (Wang, Wu).

La dimensión de Hausdorff $\dim_H E(B)$ *de* $E(B)$ *está caracterizada por la siguiente construcción: para* $\alpha \in \mathbb{N}$*, sea* $s_{n,B}(\alpha) = \inf\{\rho \geq 0 : f_{n,\alpha}(\rho) \leq 1\}$ *donde* $f_{n,\alpha} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *está dada por*

$$f_{n,\alpha}(\rho) = \sum_{a_1,\dots,a_n \in \{1,\dots,\alpha\}} \frac{1}{(B^n q_n^2)^\rho}.$$

Entonces $\dim_H E(B) = \lim_{\alpha\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{n,B}(\alpha)$.

De esta forma, $d_B = \dim_H E(B)$ satisface

$$\lim_{\alpha\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{a_1,\dots,a_n\in\{1,\dots,\alpha\}} \frac{1}{|Bq_n^2|^{d_B}} = 0.$$

Usando la aproximación asintótica $q_n^2(x) \asymp |(G^n)'(x)|^{-1}$ lo anterior equivale a

$$\lim_{\alpha\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{a_1,\dots,a_n\in\{1,\dots,\alpha\}} \frac{1}{|B(G^n)'(x)|^{d_B}} = 0,$$

donde x es la sucesión periódica dada por $[a_1, ..., a_n, a_1, ...]$.

De esta forma, $d_B = \dim_H E(B)$ satisface

$$\lim_{\alpha\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{a_1,\dots,a_n \in \{1,\dots,\alpha\}} \frac{1}{|Bq_n^2|^{d_B}} = 0.$$

Usando la aproximación asintótica $q_n^2(x) \asymp |(G^n)'(x)|^{-1}$ lo anterior equivale a

$$\lim_{\alpha\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{a_1,\dots,a_n \in \{1,\dots,\alpha\}} \frac{1}{|B(G^n)'(x)|^{d_B}} = 0,$$

donde x es la sucesión periódica dada por $[a_1, \dots, a_n, a_1, \dots]$.

Por otro lado, la ecuación

$$P(s_B) = s_B \log B$$

puede ser reescrita usando la propiedad de aproximación como

$$\lim_{\alpha\to\infty} P|_{K_\alpha}(s_B) = s_B \log B$$

de modo que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{a_1,\ldots,a_n\in\{1,\ldots,\alpha\}} \frac{1}{|B(G^n)'(x)|^{s_B}} = 0,$$

donde x es la sucesión periódica dada por $[a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots]$.

Por otro lado, la ecuación

$$P(s_B) = s_B \log B$$

puede ser reescrita usando la propiedad de aproximación como

$$\lim_{\alpha \to \infty} P|_{K_\alpha}(s_B) = s_B \log B$$

de modo que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{a_1, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, \alpha\}} \frac{1}{|B(G^n)'(x)|^{s_B}} = 0,$$

donde x es la sucesión periódica dada por $[a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots]$.

De esta forma, $d_B = \dim_H E(B)$ satisface

$$\lim_{\alpha\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{a_1,\ldots,a_n\in\{1,\ldots,\alpha\}}\frac{1}{|Bq_n^2|^{d_B}} = 0.$$

Usando la aproximación asintótica $q_n^2(x) \asymp |(G^n)'(x)|^{-1}$ lo anterior equivale a

$$\lim_{\alpha\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{a_1,\ldots,a_n\in\{1,\ldots,\alpha\}}\frac{1}{|B(G^n)'(x)|^{d_B}} = 0,$$

donde x es la sucesión periódica dada por $[a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots]$.

Así, $\dim_H E(B)$ satisface la ecuación

$$P(t) = t \log B$$

como queríamos.

Para la demostración de las dos desigualdades

$$\dim_H E(B) \leq s_B \ , \ s_B \leq \dim_H E(B),$$

la idea es aprovechar la estructura de limsup que tiene $E(B)$:

$$E(B) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \{x \in (0,1) : a_{n+1}(x) \geq B^{n+1}\}$$

$$= \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \bigcup_{a_1,\dots,a_n} \underbrace{\{x \in (0,1) : a_i(x) = a_i, 1 \leq i \leq n, a_{n+1}(x) \geq B^{n+1}\}}_{J(a_1,\dots,a_n)}$$

Para la demostración de las dos desigualdades

$$\dim_H E(B) \leq s_B \ \ , \ \ s_B \leq \dim_H E(B),$$

la idea es aprovechar la estructura de limsup que tiene $E(B)$:

$$E(B) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \{x \in (0,1) : a_{n+1}(x) \geq B^{n+1}\}$$

$$= \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \bigcup_{a_1,\ldots,a_n} \underbrace{\{x \in (0,1) : a_i(x) = a_i, 1 \leq i \leq n, a_{n+1}(x) \geq B^{n+1}\}}_{J(a_1,\ldots,a_n)}$$

Segunda parte: cota superior

Mostraremos que $\dim_H E(B) \leq s_B$. Para $t = s_B + \epsilon$, existe una medida cumpliendo la propiedad de Gibbs

$$\frac{k}{|B^n (G^n)'(x)|^{s_B+\epsilon}} \leq \frac{\mu(I(a_1, ..., a_n))}{\exp(-nP(s_B+\epsilon) + n(s_B+\epsilon)\log B)}$$

Además, tenemos estimaciones para el largo de $J(a_1, ..., a_n)$ (Wang-Wu), así como también una estimación para la derivada del mapeo de Gauss y sus iteraciones:

$$|J(a_1, ..., a_n)| \leq \frac{1}{B^{n+1} q_n(x)^2} \ , \ \ \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{2}{|(G^n)'(x)|}$$

para todo $x \in I(a_1, ..., a_n)$.

Segunda parte: cota superior

Mostraremos que $\dim_H E(B) \leq s_B$. Para $t = s_B + \epsilon$, existe una medida cumpliendo la propiedad de Gibbs

$$\frac{k}{|B^n(G^n)'(x)|^{s_B+\epsilon}} \leq \frac{\mu(I(a_1, ..., a_n))}{\exp(-nP(s_B+\epsilon) + n(s_B+\epsilon)\log B)}$$

Además, tenemos estimaciones para el largo de $J(a_1, ..., a_n)$ (Wang-Wu), así como también una estimación para la derivada del mapeo de Gauss y sus iteraciones:

$$|J(a_1, ..., a_n)| \leq \frac{1}{B^{n+1}q_n(x)^2} \ , \ \ \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{2}{|(G^n)'(x)|}$$

para todo $x \in I(a_1, ..., a_n)$.

La estructura de limsup nos da inmediatamente un cubrimiento para mayorar la dimensión de $E(B)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{s_B+\epsilon}(E(B)) &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \sum_{a_1,\ldots,a_n} |J(a_1,\ldots,a_n)|^{s_B+\epsilon}\\ &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \sum_{a_1,\ldots,a_n} \left(\frac{1}{B^{n+1}q_n^2}\right)^{s_B+\epsilon}\\ &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \sum_{a_1,\ldots,a_n} \left(\frac{2}{B^{n+1}|(G^n)'(x)|}\right)^{s_B+\epsilon}\end{aligned}$$

La estructura de limsup nos da inmediatamente un cubrimiento para mayorar la dimensión de $E(B)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{s_B+\epsilon}(E(B)) &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \sum_{a_1,\dots,a_n} |J(a_1,\dots,a_n)|^{s_B+\epsilon} \\ &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \sum_{a_1,\dots,a_n} \left(\frac{1}{B^{n+1}q_n^2}\right)^{s_B+\epsilon} \\ &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \sum_{a_1,\dots,a_n} \left(\frac{2}{B^{n+1}|(G^n)'(x)|}\right)^{s_B+\epsilon}\end{aligned}$$

Luego, por la propiedad de Gibbs obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{s_B+\epsilon}(E(B)) &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \sum_{a_1,\dots,a_n} \frac{C_1\mu(I(a_1,\dots,a_n))}{\exp(-nP(s_B+\epsilon)+n(s_B+\epsilon)\log B)} \\ &\leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \exp(-nC_2) = 0\end{aligned}$$

donde $C_2 > 0$. De esta forma, $\dim_H E(B) \leq s_B$.

Cota inferior

Para la cota inferior, usamos la misma estrategia utilizada por Wang-Wu en [5]: contruiremos conjuntos $E_\alpha(B) \subset E(B)$ y una sucesión de números $s_{B,\alpha}$ tales que

$$s_{B,\alpha} \leq \dim_H E_\alpha(B) \leq \dim_H E(B)$$
$$s_B = \lim_{\alpha \to \infty} s_{B,\alpha}$$

y por lo tanto, $s_B \leq \dim_H E(B)$, completando la demostración del teorema.

La construcción de los conjuntos $E_\alpha(B)$ viene dada por: sea n_k una sucesión de naturales a definir. Para $\alpha > 1$, definimos

$$E_\alpha(B) = \{x :\in [0,1] : 2[B^{n_k}] \geq a_{n_k} \geq [B^{n_k}] + 1 \text{ para todo } k, \\ \alpha \geq a_j \geq 1 \text{ para } j \neq n_k\}$$

La sucesión $s_{B,\alpha}$ se construye como aproximación a la solución de la ecuación

$$P(t) = t \log B$$

La construcción de los conjuntos $E_\alpha(B)$ viene dada por: sea n_k una sucesión de naturales a definir. Para $\alpha > 1$, definimos

$$E_\alpha(B) = \{x :\in [0,1] : 2[B^{n_k}] \geq a_{n_k} \geq [B^{n_k}] + 1 \text{ para todo } k, \\ \alpha \geq a_j \geq 1 \text{ para } j \neq n_k\}$$

La sucesión $s_{B,\alpha}$ se construye como aproximación a la solución de la ecuación

$$P(t) = t \log B$$

Buscamos soluciones a la ecuación considerando finitos símbolos:

$$s_{B,\alpha} = \lim_{n \to \infty} \inf \left\{ t \geq 0 : \log \sum_{a_1,\ldots,a_n \in \{1,\ldots,\alpha\}^n} |B^n q_n^2|^{-t} \leq 0 \right\}$$

Entonces

$$\lim_{\alpha \to \infty} s_{B,\alpha} = s_B,$$

Buscamos soluciones a la ecuación considerando finitos símbolos:

$$s_{B,\alpha} = \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ t \geq 0 : \log \sum_{a_1,\ldots,a_n \in \{1,\ldots,\alpha\}^n} |B^n q_n^2|^{-t} \leq 0 \right\}$$

Entonces

$$\lim_{\alpha\to\infty} s_{B,\alpha} = s_B,$$

Para estimar la dimensión de $E_\alpha(B)$, utilizamos el **principio de distribución de masas**:

Theorem.

Sea $d > 0$ *y* μ *medida de Borel en* $E_\alpha(B)$ *tal que para todo* $\epsilon > 0$ *y* μ *casi todo* $x \in E_\alpha(B)$ *existe* $C(x, \epsilon) > 0$ *tal que para todo* $r > 0$

$$\mu(B(x, r)) \leq C(x, \epsilon) r^{d-\epsilon}$$

Entonces $\dim_H E_\alpha(B) \geq d$*.*

Es necesario entonces definir una medida μ en $E_\alpha(B)$ satisfaciendo $\mu(B(x,r)) \leq Cr^{s_{B,\alpha}}$. Es posible hacer esto usando la estructura de limsup de $E_\alpha(B)$:

$$E_\alpha(B) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in D_n} J(\sigma_1, ..., \sigma_n),$$

siendo

$$D_n = \{(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \mathbb{N}^n : [B^{n_k}] + 1 \leq \sigma_{n_k} \leq 2[B^{n_k}] \text{ para todo } k \geq 1, \text{ y } 1 \leq \sigma_j \leq \alpha, \text{ para todo } 1 \leq j \neq n_k \leq n\}.$$

Definiendo μ en los intervalos $J(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ los cálculos para estimar $\mu(B(x,r))$ son complicados. Una vez que se tiene esto, el principio de distribución de masas implica que $\dim_H E_\alpha(B) \geq s_{B,\alpha}$ y se concluye la cota inferior.

Es necesario entonces definir una medida μ en $E_\alpha(B)$ satisfaciendo $\mu(B(x,r)) \leq Cr^{s_{B,\alpha}}$. Es posible hacer esto usando la estructura de limsup de $E_\alpha(B)$:

$$E_\alpha(B) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in D_n} J(\sigma_1,\dots,\sigma_n),$$

siendo

$$D_n = \{(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \in \mathbb{N}^n : [B^{n_k}] + 1 \leq \sigma_{n_k} \leq 2[B^{n_k}] \text{ para todo } k \geq 1, \text{ y } 1 \leq \sigma_j \leq \alpha, \text{ para todo } 1 \leq j \neq n_k \leq n\}.$$

Definiendo μ en los intervalos $J(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ los cálculos para estimar $\mu(B(x,r))$ son complicados. Una vez que se tiene esto, el principio de distribución de masas implica que $\dim_H E_\alpha(B) \geq s_{B,\alpha}$ y se concluye la cota inferior.

References I

- Felix Bernstein.
  Über eine anwendung der mengenlehre auf ein aus der theorie der säkularen störungen herrührendes problem.
  Mathematische Annalen, 71(3):417–439, 1911.
- Émile Borel.
  Sur un probleme de probabilités relatif aux fractions continues.
  Mathematische Annalen, 72(4):578–584, 1912.
- Dieter H Mayer.
  On a zet function related to the continued fraction transformation.
  Bulletin de la Societe mathematique de France, 104:195–203, 1976.

References II

Dieter H Mayer.
On the thermodynamic formalism for the gauss map.
Communications in mathematical physics, 130(2):311–333, 1990.

Bao-Wei Wang and Jun Wu.
Hausdorff dimension of certain sets arising in continued fraction expansions.
Advances in Mathematics, 218(5):1319 – 1339, 2008.

Formalismo termodinámico y teoría de la dimensión: Dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Borel–Bernstein

Felipe Pérez

Pontificia Universidad Católica de Chile

12th May 2018