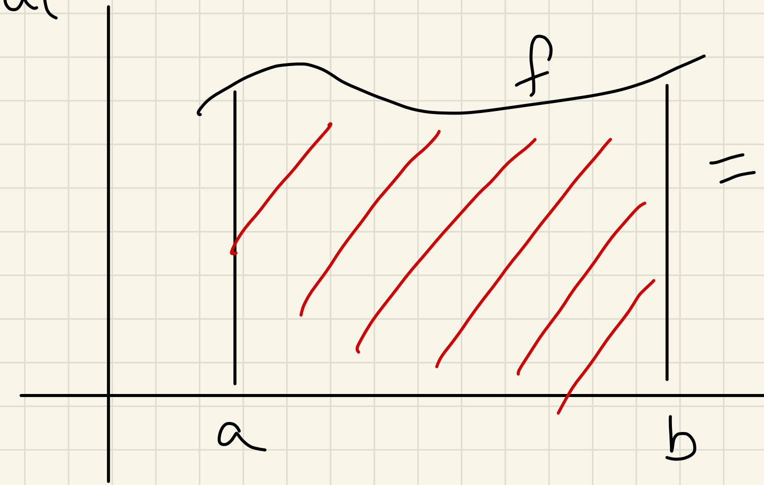
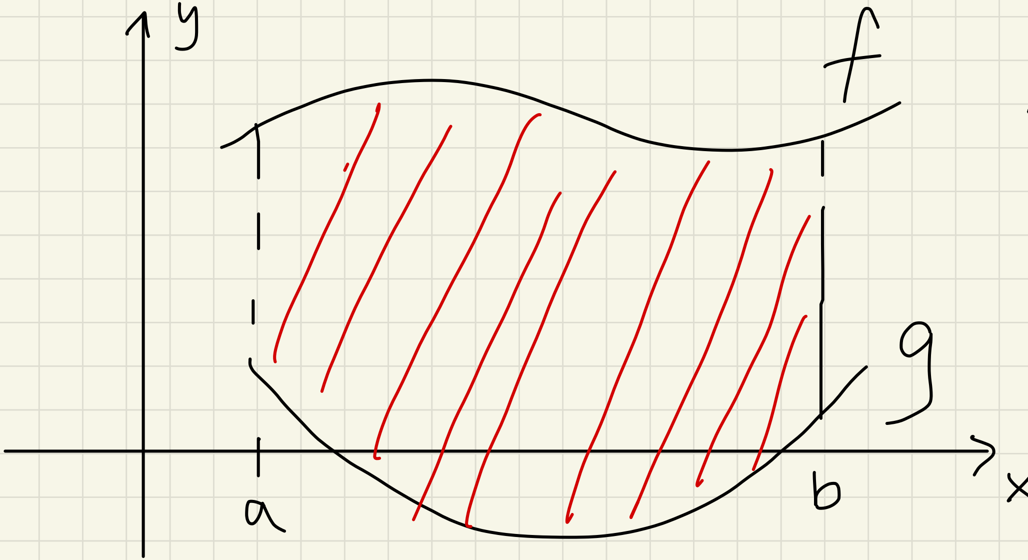
Clase 9: área entre dos curvas

Integral



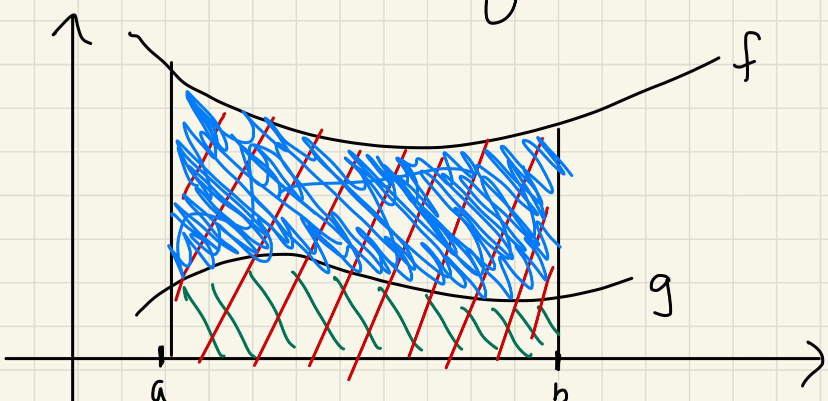
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

Qué pasa si queremos



Área entre f y g ??

Podemos hacer lo siguiente: si $f \geq g > 0$



$\int f dx$ = área roja

$\int g dx$ = área verde

área roja − área verde = área entre f y g.

= área azul

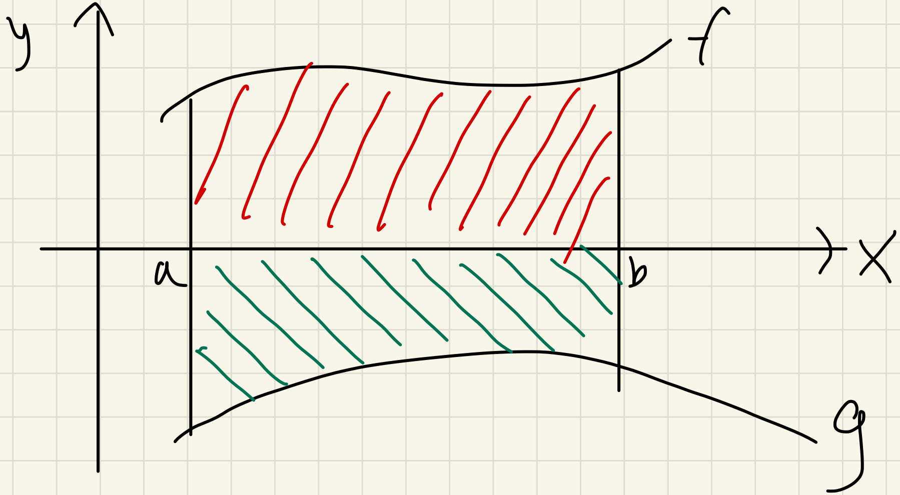
$$\int f\,dx - \int g\,dx = \int (f-g)\,dx$$

Importante: asumimos que $f \geq g > 0$

Qué pasa cuando esto no es cierto?

Veamos el siguiente caso

$$f > 0 > g$$



$\int f\,dx$ = área roja

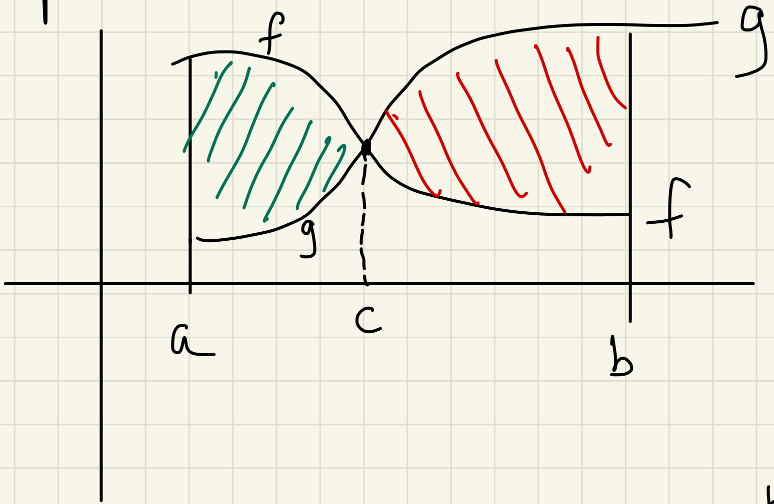
$\int g\,dx = -$ área verde

$-\int g\,dx$ = área verde

Área entre f y g = área roja + área verde

$$= \int f\,dx + -\int g\,dx = \int (f-g)\,dx$$

Qué pasa si



? Área entre f y g = área verde + área roja

Entre a y c, $f > g > 0$

c y b, $g > f > 0$

$$\text{Área verde} = \int_a^c (f-g)\,dx \qquad \text{Área roja} = \int_c^b (g-f)\,dx$$

primero va la que está más arriba en el gráfico

$$|f-g| = \begin{cases} f-g, & f-g \geq 0 \\ g-f, & f-g < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f-g \,, & f \geq g \\ g-f \,, & g > f \end{cases}$$

$$\text{Área verde} = \int_a^c |f-g|\,dx \qquad \text{Área roja} = \int_c^b |f-g|\,dx$$

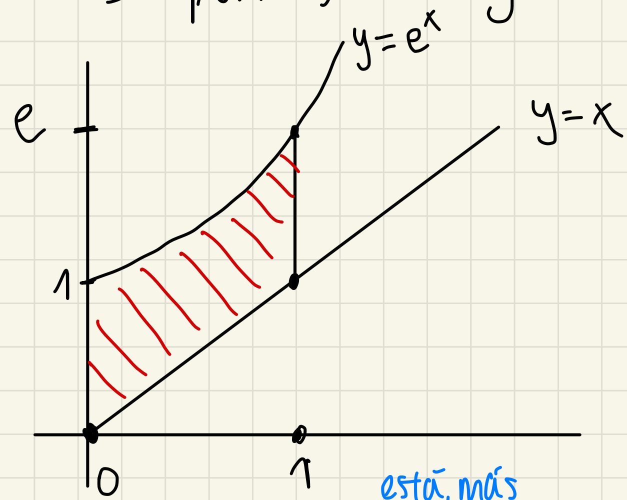
$$\text{Área total} = \text{Área verde} + \text{Área roja} = \int_a^b |f-g|\,dx$$

Obs: esto vale $\boxed{\boxed{\text{siempre.}}}$

Teo: área entre f y g $= \int_a^b |f-g|\,dx$

Ej: encuentre el área entre $y = e^x$, $y = x$ entre los puntos 0 y 1

Sol:



$e^0 = 1$

$e^1 = e \approx 2{,}7...$

Queremos el área roja:

$e^x > x$ entre 0 y 1

$$\text{Área roja} = \int_0^1 e^x - x \, dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(e^1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(e^0 - \frac{0^2}{2}\right)$$

está más abajo.

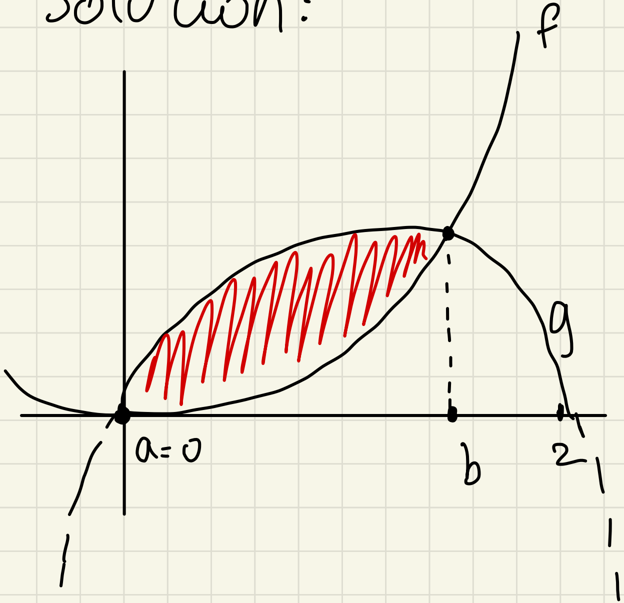
va primero la que está más arriba en el gráfico

$$= \left(e - \tfrac{1}{2}\right) - (1 - 0)$$

$$= e - \tfrac{3}{2}$$

Ej: encuentre el área entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - x^2$.

Solución:



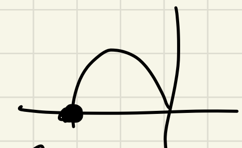
Cuál es b??

$f(0) = 0$

$g(0) = 0$

g es una parábola abierta hacia abajo (- termino con x^2):

o



Cuál es ese punto??

$$g(x) = 0 = 2x - x^2$$

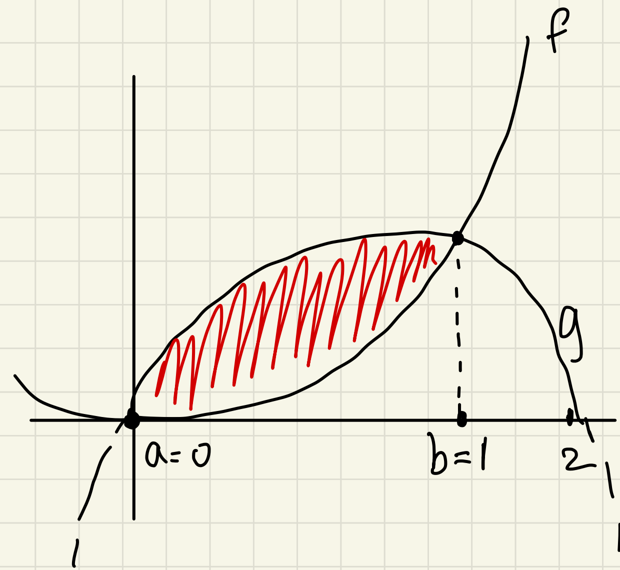
$$0 = x(2-x)$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad 2 - x = 0$$

$$x = 2$$

lo que define a b es: "el punto (distinto de cero) donde f y g son iguales".

$$f(b) = g(b)$$
$$b^2 = 2b - b^2$$
$$2b^2 - 2b = 0$$
$$b(b-1) = 0 \rightarrow b = 0 \text{ o } b = 1$$



Todos los ingredientes:

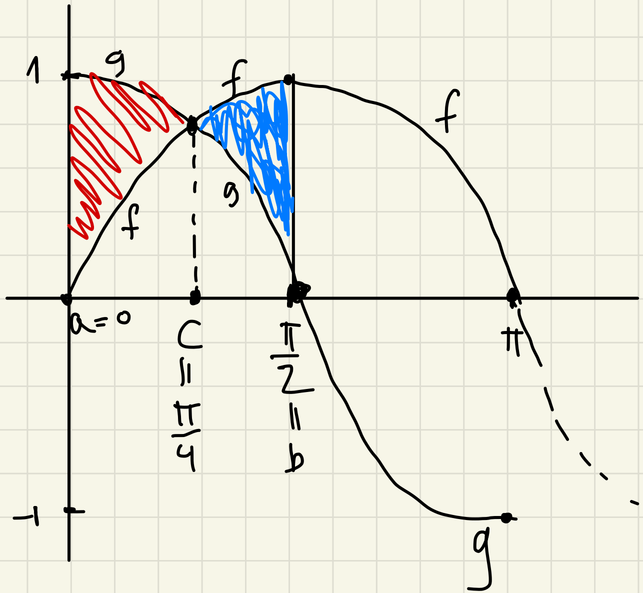
- $a = 0$, $b = 1$
- Entre a y b, $g \geq f \geq 0$

Aréa roja $= \int_a^b g - f\,dx = \int_0^1 2x - x^2 - x^2\,dx = \int_0^1 2x - 2x^2\,dx$

$= 2\int_0^1 x - x^2\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) = 2\,\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Ej: Calcule el área entre $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$, entre 0 y $\pi/2$



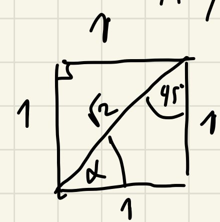
$f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = \cos(x)$

Cuál es c??

$c = \pi/4 \quad \left(\operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4) \right)$

$\pi/4 = 45°$



$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

En $[0, \pi/4]$ $g \geq f$

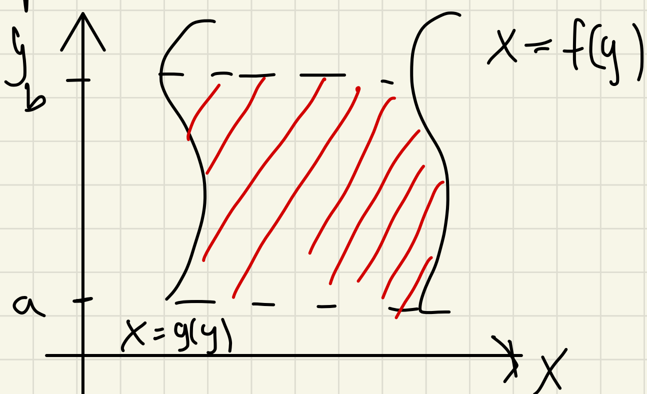
$[\pi/4, \pi/2]$ $f \geq g$

Área roja $= \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,dx = \left(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$

Área azul $= \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) - \cos(x)\,dx = \left(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \sqrt{2} - 1$

Área total = Área roja + Área azul $= \boxed{2\sqrt{2} - 2}$

Qué pasa si tenemos

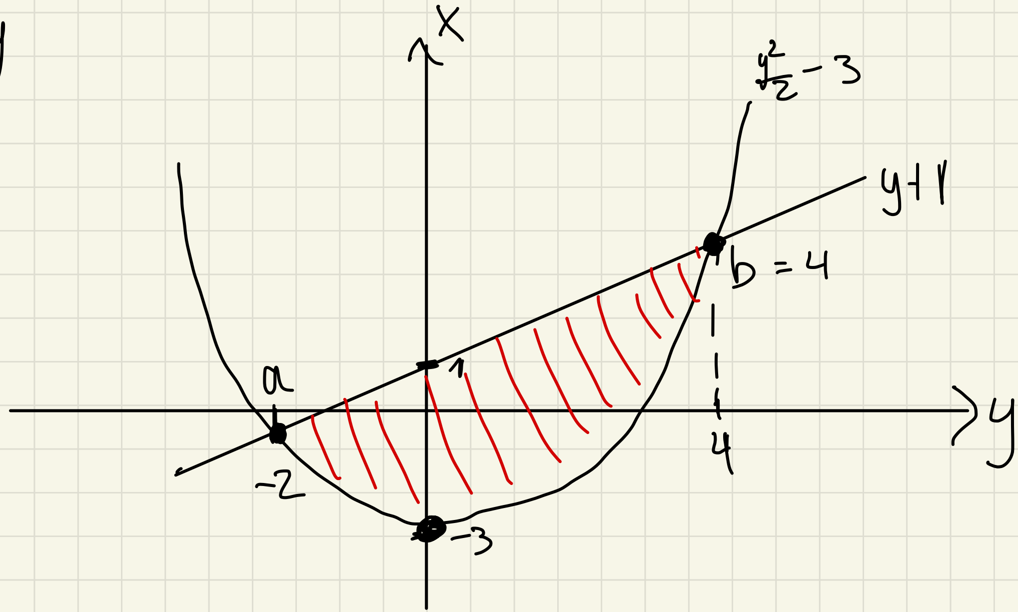


Área roja $= \displaystyle\int_a^b |f(y) - g(y)|\,dy$

Ej: encuentre el área entre $y^2 = 2x + 6$ y $x = y + 1$.

$x = \frac{y^2}{2} - 3$ $\qquad$ $x = y + 1$

Graficamos x como función de y



a y b son los puntos donde las funciones son iguales:

$$\frac{y^2}{2} - 3 = y+1$$

$$\frac{y^2}{2} - y - 4 = 0$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 8}}{2}$$

$$= 1 \pm 3 = \begin{cases} 4 & = b \\ -2 & = a \end{cases}$$

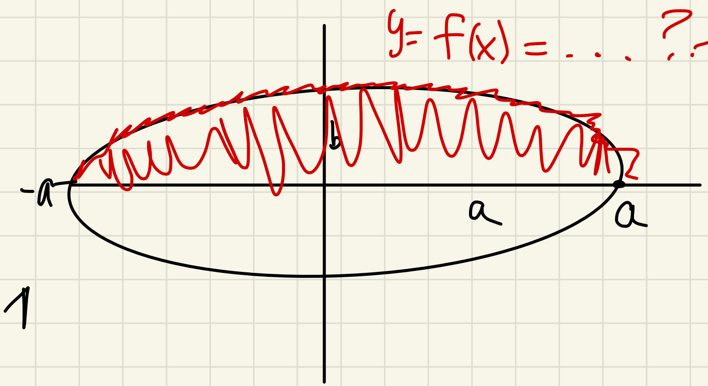
Área roja $= \displaystyle\int_{-2}^{4} y+1 - \left(\frac{y^2}{2} - 3\right) dx = \left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{y^3}{6} + 3y\right)\Big|_{-2}^{4}$

$$= \frac{4^2}{2} + 4 - \frac{4^3}{6} + 3\cdot 4 - \left(\frac{(-2)^2}{2} - 2 - \frac{(-2)^3}{6} + 3\cdot(-2)\right)$$

$$= 18$$

Ej: calcule el área de una elipse de semi-ejes a y b.

$a > b$



Indicaciones

1. Ecuación de la elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$. Desafío: calcular esta integral ($x = \operatorname{sen}(u)$)