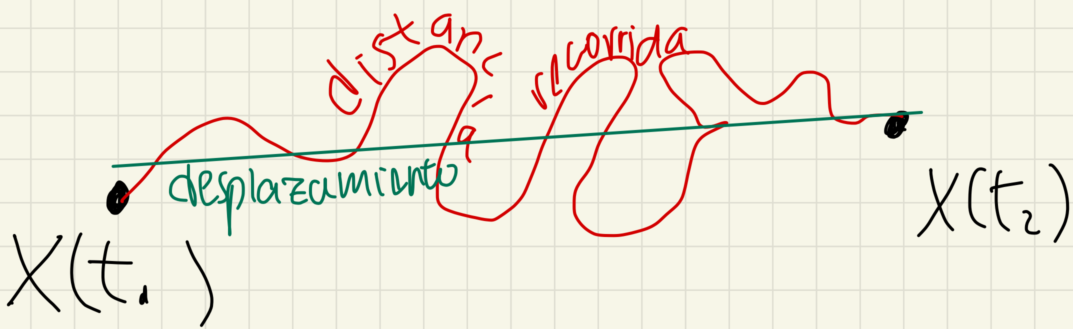
# Clase 6:

Vimos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \text{velocidad}\, dt = \text{desplazamiento entre } t_1 \text{ y } t_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |\text{velocidad}|\, dt = \text{distancia recorrida}$$

%



Esto vale no solo para velocidad/desplazamiento, es más general:

Si $f(t)$ es la tasa de cambio con respecto a $t$ de una cantidad $g$ (esto es, $f(t) = dg/dt$), entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = g(t_2) - g(t_1)$$

(Esto es el TFC)

El parámetro $t$ no sólo puede ser tiempo, puede ser otras cosas.

Ejemplo:
Suponga que en un tanque se vierte/quita líquido a una razón de

$$f(t) = \operatorname{Sen}(2\pi t) \qquad \text{litros/segundo}$$

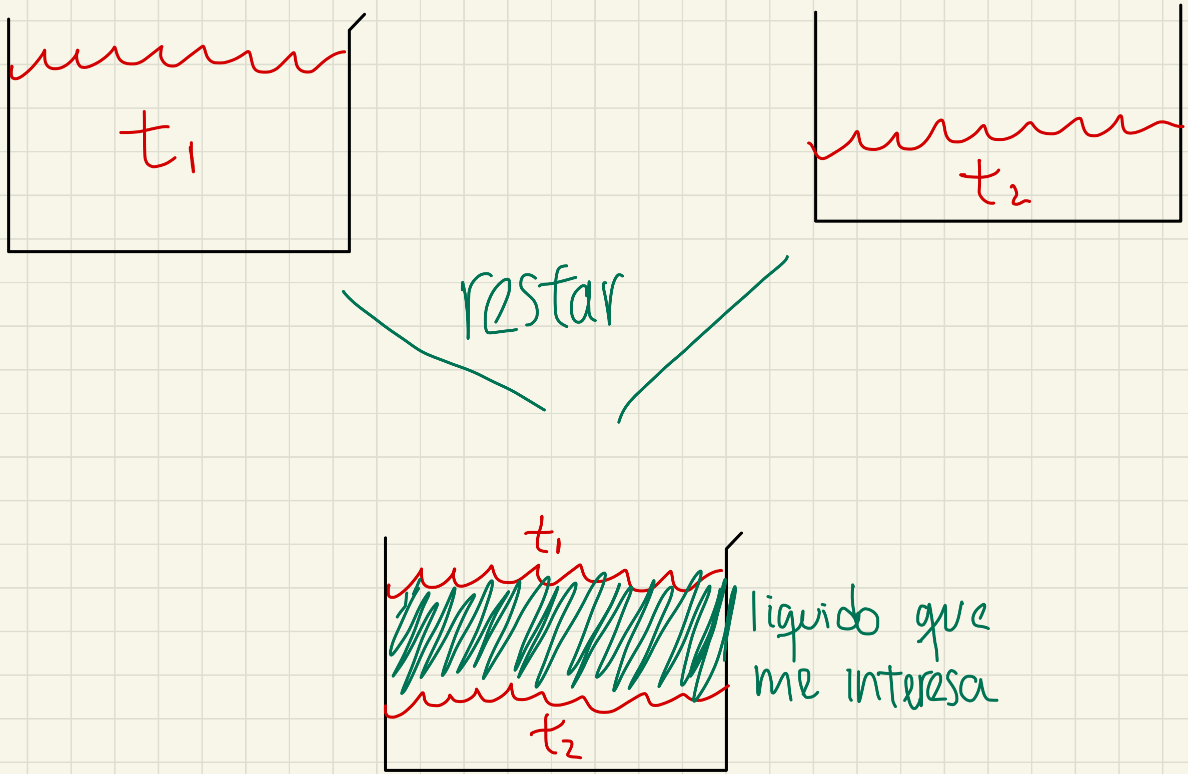
- Calcule el cambio total de líquido en el tanque entre $t = 1/4$ segundos y $t = 1$ segundo.
- Calcule la cantidad total de líquido que entró o salió del tanque.

Solución:

- $f(t)$ es como la velocidad a la que se pone/saca líquido del tanque.
- $f<0$, se quita líquido,
- $f>0$, se pone líquido,
- $f=0$, no se hace nada

Dijimos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \text{razón cambio}\, dt = \text{cantidad}(t_2) - \text{cantidad}(t_1)$$



t1
t2
restar
t1
liquido que
me interesa
t2

$f(t) = \operatorname{sen}(2\pi t) \qquad t_1 = 1/4 , \quad t_2 = 1$

queremos

$$\int_{1/4}^{1} \operatorname{sen}(2\pi t)\,dt$$

Sabemos que $\operatorname{sen}(x) = (-\cos x)'$

Pregunta $\operatorname{sen}(2\pi x) = (\ ??\ )'$

Candidato: $-\cos(2\pi x)$

Su derivada es

$$\left(-\cos(2\pi x)\right)' = \operatorname{sen}(2\pi x)\cdot 2\pi$$

$$\left(\frac{-1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right)' = \operatorname{sen}(2\pi x)$$

$$\left(\quad F(x) \quad\right)' = f(x)$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(t)\,dt = F(1) - F(1/4) \qquad \text{TFC !!}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi) - \frac{-1}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi) + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{-1}{2\pi}$$

El cambio total en la cantidad de líquido es $-\frac{1}{2\pi}$ litros

La cantidad de líquido que entró o salió del tanque está dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} |\text{razón de cambio}|\, dt$$

Queremos $\int_{1/4}^{1} |\text{sen}(2\pi t)|\, dt$

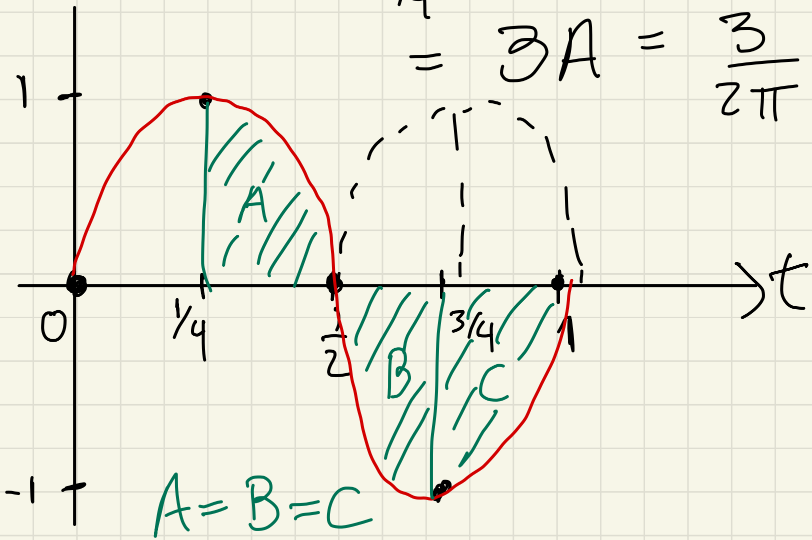
$= 3A = \frac{3}{2\pi}$

$\int_{1/4}^{1} \text{sen}(2\pi t)\, dt = -\frac{1}{2\pi}$

$A - B - C = A - A - A = -A$

$-A = -\frac{1}{2\pi}$

$\boxed{A = \frac{1}{2\pi}}$




| | $\text{sen}(2\pi t)$ |
|---|---|
| $t=0$ | $0$ |
| $t=\frac{1}{4}$ | $1$ |
| $t=\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $t=3/4$ | $-1$ |
| $t=1$ | $0$ |

$\text{sen}(2\pi t) \geq 0$ si $t \in [1/4, 1/2]$

$\text{sen}(2\pi t) \leq 0$ si $t \in [1/2, 1]$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} |\mathrm{sen}(2\pi t)|\,dt = \int_{\frac{1}{4}}^{1/2} \mathrm{sen}(2\pi t)\,dt + \int_{1/2}^{1} -\mathrm{sen}(2\pi t)\,dt$$

$$= \quad \ldots$$

Esto se puede hacer tal cual como lo anterior.

$$= \frac{3}{2\pi}$$

Integrales indifinidas:

Recordamos el TFC:

Si $F$ es tal que $F' = f$ antonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Vamos a llamar a F en este caso, una anti-derivada de f.

$$\int f(x)\,dx = F(x) \longleftarrow \text{integral indefinida.}$$

Obs: para una f fija, hay más que solo una elección para F, o sea hay más de una anti-derivada:

Ej: $f(x) = x^2$

$$F_1 = \frac{x^3}{3}, \quad F_2 = \frac{x^3}{3} + 3, \quad F_3 = \frac{x^3}{3} + \pi$$

todas son anti-derivadas de $f$

$$F_1' = F_2' = F_3' = f$$

Hay toda una familia infinita de funciones con la misma propiedad:

$$\{F(x) = x^3/3 + C : C \in \mathbb{R}\}$$

constante

Toda función de esa forma es una anti-derivada de f.

Convención: cuando calculamos integrales indefinidas, queremos toda la familia

$$\int x^2 dx = x^3/3 + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

etc...

No olvidar la constante.

Cómo se relaciona la integral indefinida con $\int_a^b f(x)\,dx$ (integral definida)??

$$\int f(x)\,dx = \text{anti-derivada} = F(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ej: $f(x) = x^2$

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Tomemos

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b \underset{=}{\overset{\text{significa}}{=}} \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Otro ej:

$$\frac{\operatorname{sen}(39x\sqrt{x})}{\sqrt{x^2+\cos x}}\Bigg|_0^1 \underset{=}{\overset{\text{significa}}{=}} \frac{\operatorname{sen}(39\cdot 1\cdot\sqrt{1})}{\sqrt{1^2+\cos(1)}} - \frac{\operatorname{sen}(39\cdot 0\cdot\sqrt{0})}{\sqrt{0^2+\cos 0}}$$

Algunas integrales conocidas:

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1}(x) + c = \arctan(x) + c$$

$$\vdots$$

Ver tabla integrales que subí a la página

Ojo: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsen}(x) + C$

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (\text{arcsen}(3) + C)$$

todo mal con eso

$$-(\text{arcsen}(2) + C) \quad ??$$

$$= \text{arcsen}(3) - \text{arcsen}(2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f(2) = \frac{1}{\sqrt{1-4}} = \ldots ??$$

$$f(3) = \frac{1}{\sqrt{1-9}} = ??$$

$f(x)$ no está definida en $[2,3]$

$\arcsen(3) =$ el número cuyo seno es 3

$= \ldots$

Pero seno toma valores entre $[-1,1]$, no llega a 3.

Ejemplo:

Calcular $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$

Observemos que

$$\frac{1}{1+x^2} - 2 = \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} - 2\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int 2\,dx$$

$$= \arctan x - 2x + C$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} = \dots$$

probar muchas cosas,

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

hacer ejercicios,
ver ejercicios resueltos
e incorporar las soluciones a
nuestro arsenal.

---

Los ejercicios de integrales tienen una ventaja: se pueden comprobar.

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x) \qquad \text{TFC}$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Comprobamos la respuesta:

$$\left(\frac{1}{2} e^{x^2}\right)' = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x = x e^{x^2}$$

$f(x) = e^x \quad g(x) = x^2 \Rightarrow f(g(x)) = e^{x^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = e^x \\ g'(x) = 2x \end{array} \right.$

Regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Como dio lo mismo que el integrando, se

que la respuesta está bien!