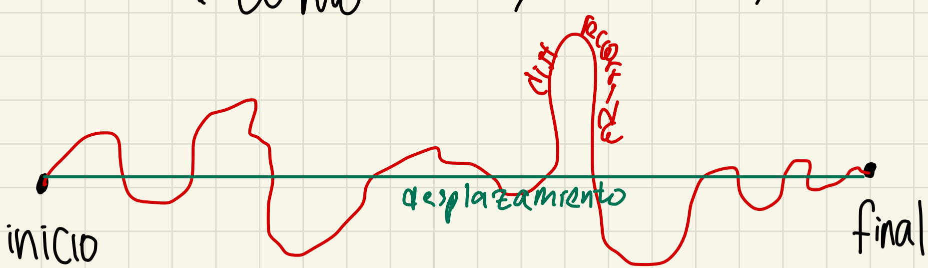
Clase 5:

Problema: supongamos que un auto se mueve en línea recta, y registramos su velocidad en c/ tiempo t. Esto nos da una función

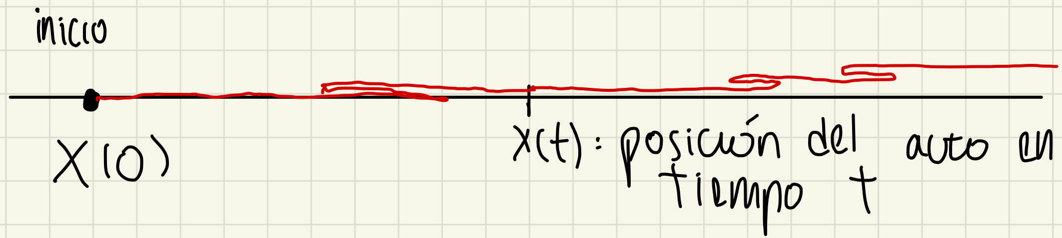
$$t \longmapsto v(t)$$

Pregunta:
- cómo podamos encontrar la distancia recorrida?
- cómo " " el desplazamiento?



- distancia recorrida: largo de la cuerda roja
- desplazamiento: distancia entre final e inicio

lo que nos dan es $v(t)$:



$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Ejemplo: si $\boxed{v(t) = t}$ (m/s)

$v(0) = 0$ m/s

$v(1) = 1$ m/s

$v(7) = 7$ m/s

Posición ??

Notamos que

$$x(t) \rightsquigarrow \frac{d}{dt}x(t)$$

$$\text{posición} \xrightarrow{\text{derivando}} \text{velocidad}$$

$$\xleftarrow[\text{integrando}]{}$$

$$\int v(t)\,dt \longleftarrow v(t)$$

En nuestro ejemplo:

$v(t) = t \rightsquigarrow x(t) =$ función cuya derivada es t

$$= t^2/2 \qquad \left(t^2/2 + cte\right)$$

- qué valor toma es cte?
- cuál elijo?
- tengo que elegir una?

Recordemos el TFC(2)

Si $F' = f$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

reprobado

$$\cancel{\int F(x)\,dx = f(b) - f(a)}$$

Lo usamos con la siguiente elección de funciones

$$F = \overset{\text{posición}}{x(t)} \qquad f = F' = \overset{\text{velocidad}}{v(t)}$$

$$\xrightarrow{\text{TFC}} \int_a^b v(t)\,dt = x(b) - x(a)$$

Cómo tomamos a y b? $a = 0$, $b = t$

$$\int_0^t v(t)\,dt = x(t) - x(0) \quad // \quad v(t) = t$$

$$\Rightarrow \int_0^t t\,dt = x(t) - x_{inicial} \quad // \text{ reemplazando } v(t) \text{ por la función que nos dan}$$

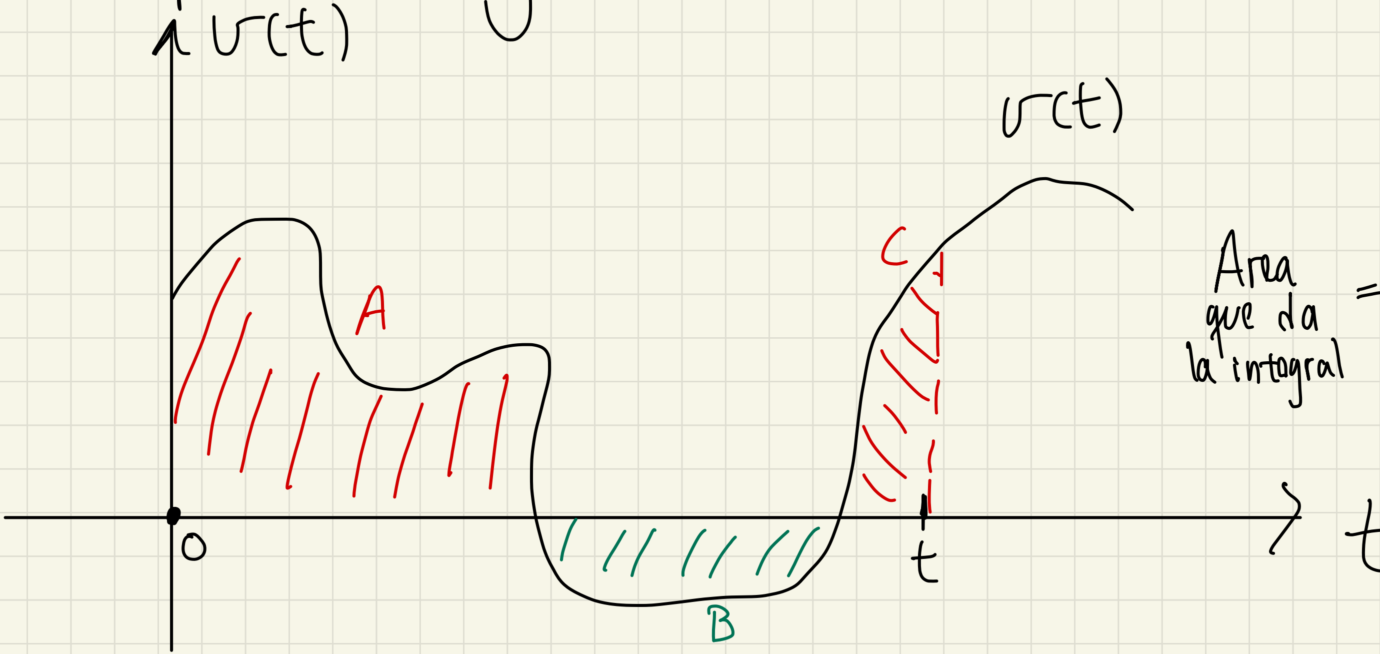
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{t^2}{2} + x_{inicial}}$$

// haciendo la integral $\int_0^t t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_t - \cancel{\frac{t^2}{2}\Big|_0} = \frac{t^2}{2}$

¿Qué hicimos? Dada $v(t)$, encontramos $x(t)$

Es válido sólo cuando $v(t) = t$

Interpretación geométrica:



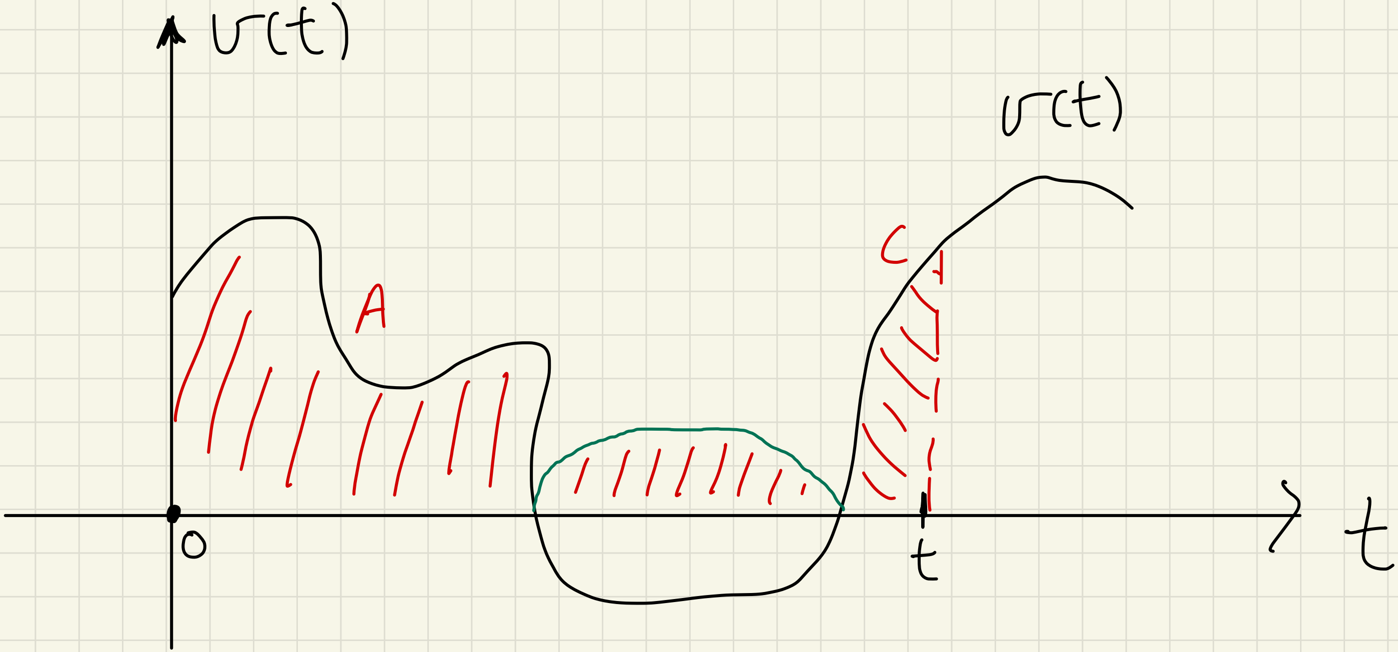
Area que da la integral $= A - B + C$

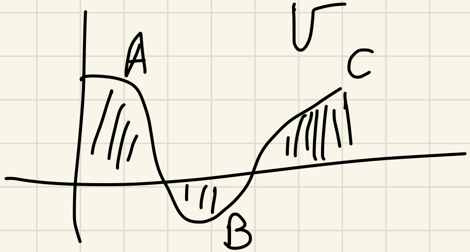
$$X(t) = \underline{X(0)} + \underbrace{\int_0^t v(t)\,dt}_{}$$

= area entre la curva y el eje

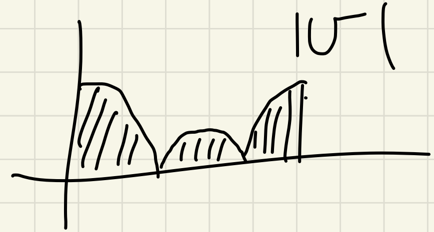
Qué pasa si miramos $A+B+C$?

Esto corresponde a





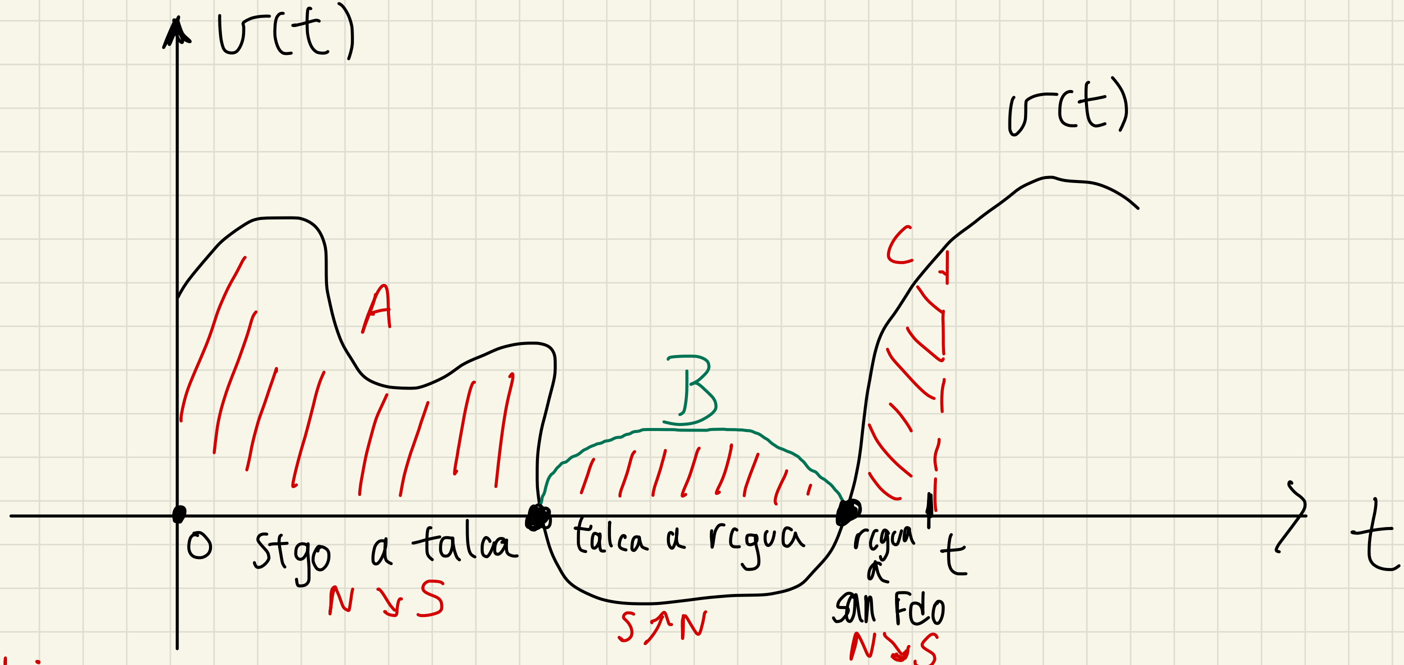
$\Rightarrow$



$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$\int v\,dt = A - B + C \quad \neq \quad \int |v|\,dt = A + B + C$$

diferencia, muy importante!!



Area: distancia entre el par de ciudades

$$\int v\,dt =$$

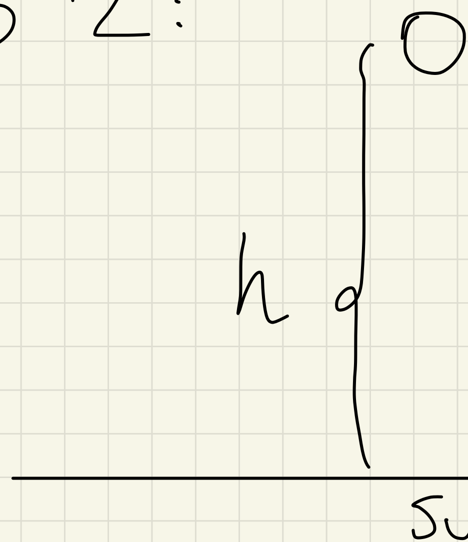
$$\int |v|\,dt = A + B + C$$

$\int v\,dt$ = desplazamiento = $x_{final} - x_{inicial}$

$\int |v|\,dt$ = distancia recorrida

Ejemplo 2:

pelota se deja caer, en $t=0$



$t=5$

$h(5)=?$

Pregunta: escriba la altura de la pelota como función del tiempo. Asuma que la gravedad es constante en toda la trayectoria de la pelota.

Solución:

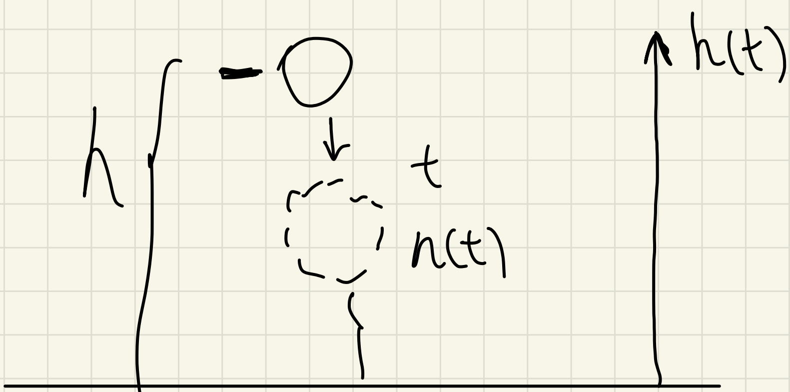
- Gravedad = aceleración de gravedad

$= g \approx 9.8 \ m/s^2$

- Aceleración = tasa de cambio de la velocidad

$$= \frac{dv}{dt}$$

- Altura inicial es h
- "La pelota se suelta" = velocidad inicial 0.



pelota cae hacia abajo:

- velocidad es negativa.
- aceleración es negativa.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g \approx -9.8\ m/s^2$$

$$v(0) = 0$$

Queremos $v(t)$: usamos el TFC

Si $F' = f$

$$\int_{t_1}^{t_2} f\,dx = F(t_2) - F(t_1)$$

// nombre de variable no importa, puede ser x ó t ó pepito

$F = v$, $F' = f = a$

$t_2 = t$, $t_1 = 0$

$$\Rightarrow \int_0^t a\,dt = v(t) - \underbrace{v(0)}_{0}$$

$$\int_0^t -g \, dt = v(t)$$

$$-g(t-0) = v(t)$$

$$\boxed{v(t) = -gt}$$

Ahora podamos sacar la altura/posición integrando la velocidad:

TFC: Si $F' = f$ $\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx = F(t_2) - F(t_1)$

$$F = h \qquad F' = f = v, \quad t_2 = t, \quad t_1 = 0$$

$$\int_0^t v(t)\,dt = h(t) - \underbrace{h(0)}_{h}$$

$$\int_0^t -gt\,dt = h(t) - h$$

$$h(t) = h + \underbrace{\int_0^t -gt\,dt}$$

$$= -g\int_0^t t\,dt = -g\frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{h(t) = h - gt^2/2}$$

Ejemplo con números:

$h = 100\,m$

Pregunta: Cuándo está a 50m de altura la pelota?? (tome $g = 10\,m/s^2$)

$$h(t) = h - gt^2/2$$

t cuando $h(t) = 50$

$$50 = 100 - 10t^2/2$$

$$10t^2/2 = 50$$

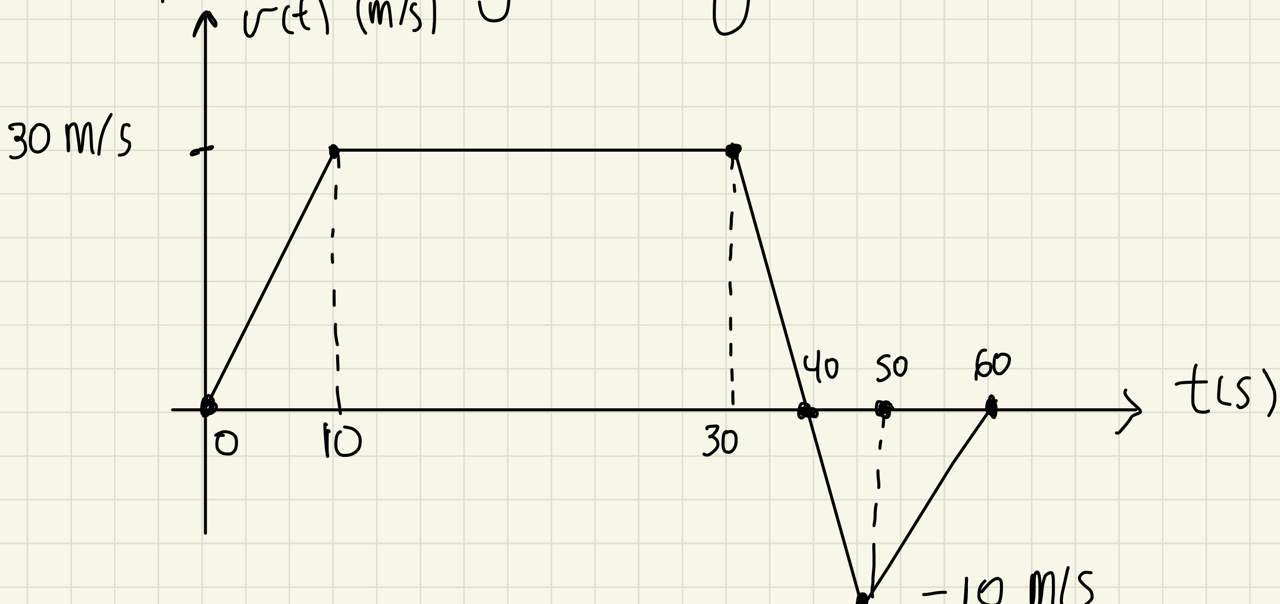
$$t^2 = \cancel{100}/10$$

$$t = \sqrt{10}$$

La altura es 50m luego de $\sqrt{10}$ segundos!

Problema:

Suponga que un vehiculo tiene velocidad dada por el siguiente gráfico



Calcule:

1. La distancia recorrida entre $t=0$ s y $t=20$ s.

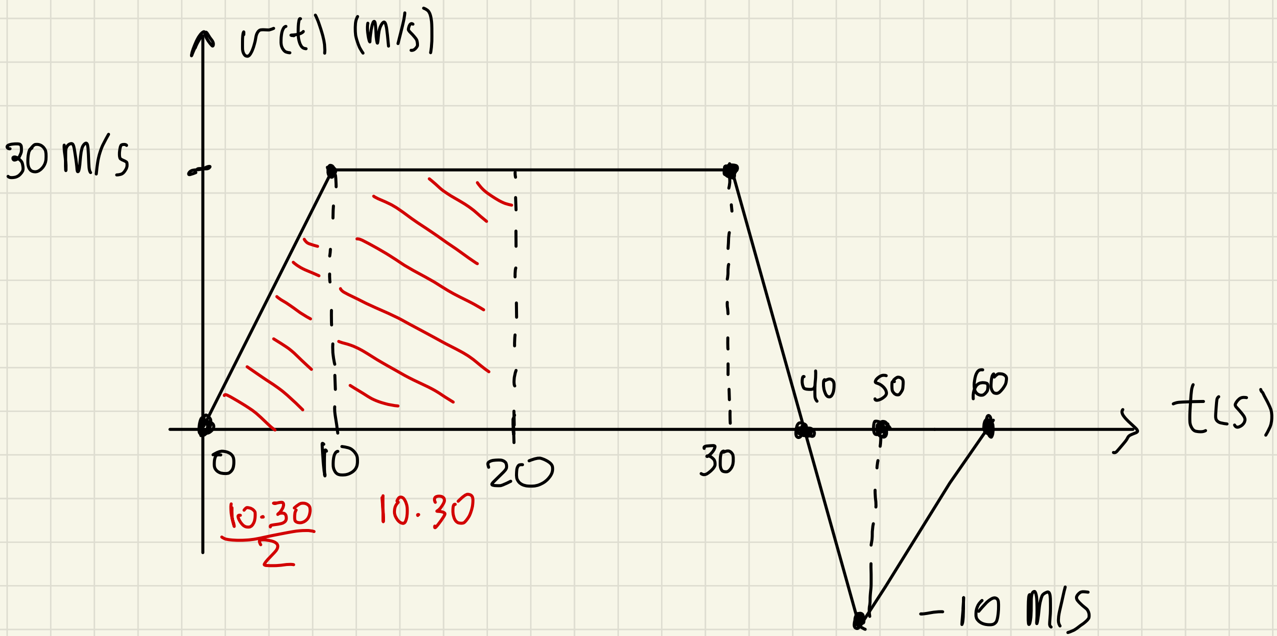
2. La distancia recorrida entre $t=30$ s y $t=50$ s

3. Dibuje el gráfico de la aceleración.
4. Dibuje el gráfico de la posición.
5. Cómo interpretar $\int_0^{60} v(t)\,dt$??

Solución:

1.

$t = 0 \quad y \quad t = 20$



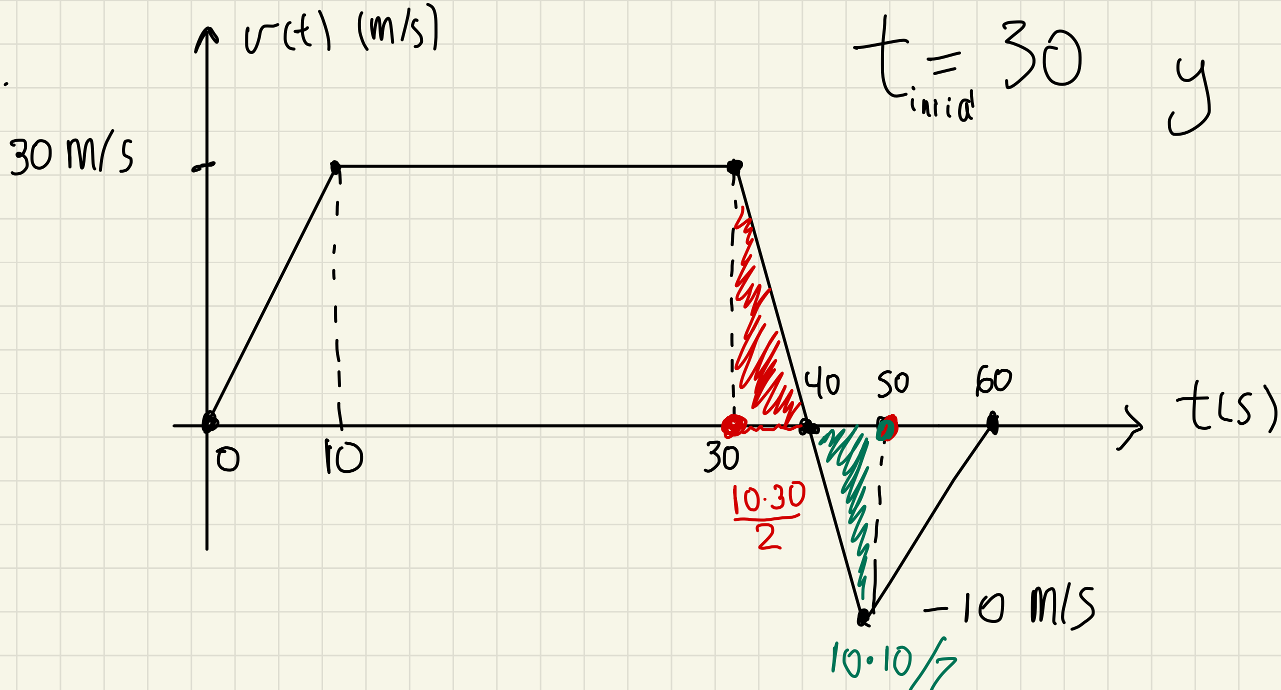
dist recorrida = área bajo curva $|v|$ entre 0 y 20

$= \text{área roja}$

$$= \frac{10 \cdot 30}{2} + 10 \cdot 30 = 150 + 300 = 450 m$$

2.

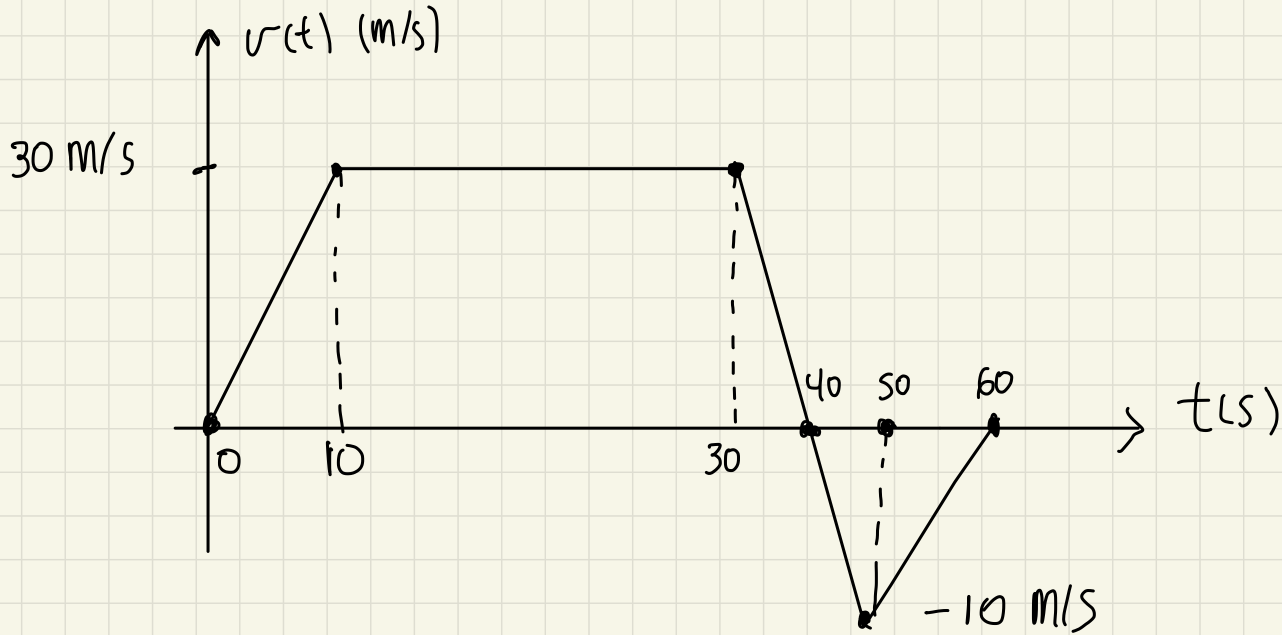
$t_{inicial} = 30$ y $t_{final} = 50$



Dist recorrida es $\frac{10 \cdot 30}{2} + \frac{10 \cdot 10}{2} = 150 + 50$

$= 200$

3.



Necesitamos $v(t)$:

- Entre $t=0s$ y $t=10s$, pasa de 0 a 30 m/s

$$v(t) = 3t \ (m/s) \text{ entre } 0 \text{ y } 10$$

- Entre $t=10s$ y $t=30s$, la velocidad es cte, y por lo tanto

$$v(t) = 30 \ (m/s)$$