Clase 4:

Vimos que el TFC, parte 1, nos dice que

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,dx = f(t)$$

derivada(integral(algo)) = algo.

Vimos algunos ejemplos:

$f(x) = x^2$

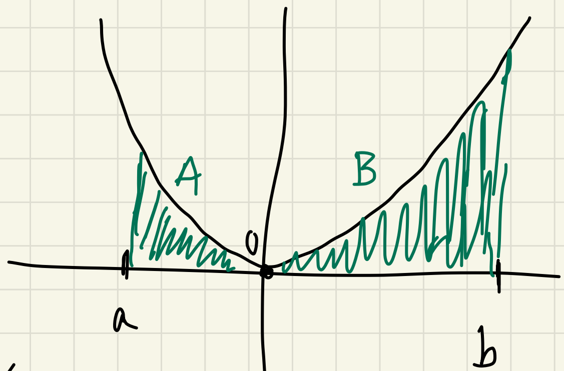
$$F(t) = \int_0^t x^2\,dx = t^3/3$$

Observaciones: $F'(t) = t^2 = f(t)$

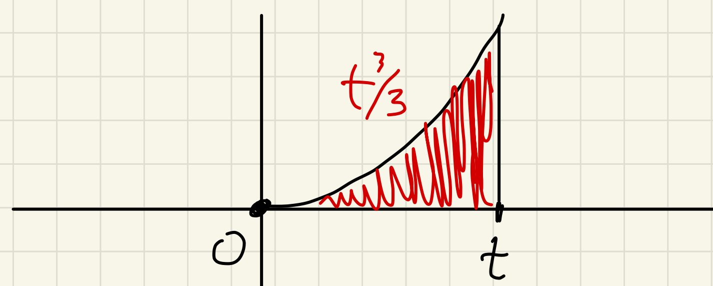
Otra observación / problema: calcular

$\int_a^b x^2 dx = ??$, $a < 0 < b$

Solución:



Sabemos que $\int_0^t x^2 dx = \frac{t^3}{3}$, en términos de áreas



$$\left.\begin{aligned} A &= -a^3/3 \\ B &= b^3/3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_a^b x^2 dx = A + B = -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$$

Por qué el signo $-$ en A?

$a < 0$ (por ej, $a = -3$)

$a^3/3 < 0$ ($a^3 = -27$, $a^3/3 = -9$, $-a^3/3 = 9$)

$-a^3/3 > 0$

$$\Rightarrow \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = F(b) - F(a)$$ muy importante

$$F(t) = \int_0^t x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$F(a) = a^3/3$, $F(b) = b^3/3$

Otra forma de ver lo mismo:

$a < 0 < b$

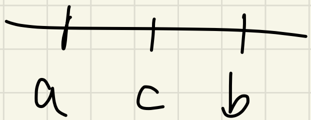
$$\int_a^b x^2 dx = \underbrace{\int_a^0 x^2 dx} + \underbrace{\int_0^b x^2 dx}$$

$$= -\int_0^a x^2 dx + b^3/3$$

$$= -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{\text{Sabemos que } F(t) = \int_0^t x^2 dx = t^3/3}$$

props de la integral



$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b, \quad \int_a^b = -\int_b^a$$

El hecho de que $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, no es coincidencia. De hecho, esto es super gral:

Teorema Fundamental del cálculo, parte 2

Si F es tal que $F' = f$ (pensar en $f(x) = x^2$, $F(x) = x^3/3$), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

no hay sumas, ni límites!!

Ejemplos:

1. Ya vimos que $f(x) = x^2$, $F(x) = x^3/3$.
Si yo tomo $F(x) = x^3/3 + 7$, entonces
$F'(x) = x^2 = f(x)$, también sirve tomar
esa $F(x) = x^3/3 + 7$. De hecho, uno puede
sumar cualquier constante (se mueren al
derivar)

$$\underbrace{F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + 7, \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + \pi}_{\text{derivadas } = x^2}$$

$\int_a^b x^2 dx = F(b) - F(a)$, para cualquiera de esas F's.

lo único que realmente necesitamos, es $F' = x^2$.

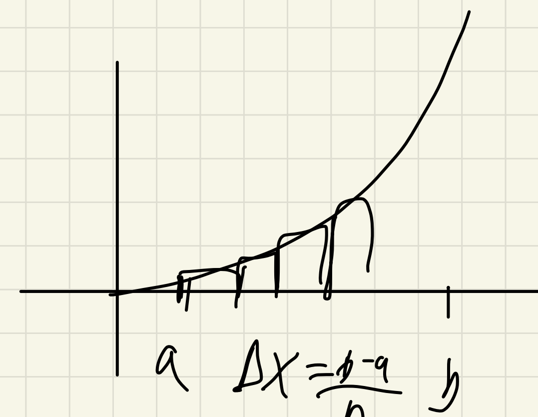
---

2. Si queremos $\int_a^b x^7 dx$,

$f(x) = x^7$ integrando, lo que queremos es una F tal que

$F' = x^7$

Qué función, al derivarla, da x^7??



$f(x_i) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^7$.

Σ ... se pone feo

$F(x) = x^8/8$ // uno se da cuenta de que para potencias de x, uno aumenta la potencia en 1, y divide por esta nueva potencia

$F'(x) = \frac{\cancel{8}x^7}{\cancel{8}} = x^7$

$$\Rightarrow \int_a^b x^7 dx = F(b) - F(a) = \frac{b^8}{8} - \frac{a^8}{8} \quad //$$

En la misma linea: $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = x^{n+1}/(n+1)$

$$\int_a^b x^n dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Ejemplo: $\int_1^7 3x^3 + 2x^2 - 3\,dx =$

$= \int_1^7 3x^3\,dx + \int_1^7 2x^2\,dx - \int_1^7 3\,dx$ // integral de una suma = suma integrales

$= 3\int_1^7 x^3\,dx + 2\int_1^7 x^2\,dx - \int_1^7 3\,dx$ // $\int c\cdot f\,dx = c\int f\,dx$

$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = x^4/4$ // $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = x^3/3$ // $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

$= 3\left(\frac{7^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) + 2\left(\frac{7^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - 3(7-1)$

$\int_1^7 x^3\,dx$

El TFC nos dice que si $f(x) = x^3$, queremos una F tal que $F' = f$

Cuál es esa F??

$f(x) = x^3 \to 3+1$

$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}} = x^3$

$\frac{x^4}{4} = F(x)$

$f(x) = x^2$

$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = x^2$

$\frac{x^3}{3} = F(x)$

Más ejemplos:

posible porque siempre hay muchos candidatos que funcionan

- Dada $f(x)$, damos posible $F(x)$

1. $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = x^{n+1}/(n+1)$
2. $f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \text{sen}(x)$
3. $f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$
4. $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$
5. $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$

   $= \ln x$ si $x > 0$

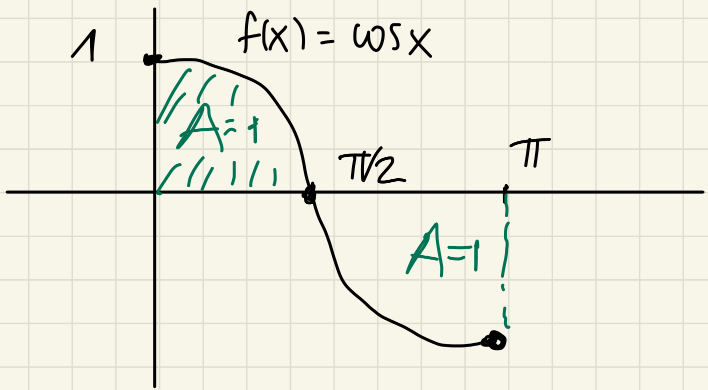
// qué función al derivarla da $\cos(x)$?

valor absoluto

$\ln(-3) = ??$

↑ hay que saberlos!!

Problema: encontrar el área (absoluta, no neta, no con signos) entre el gráfico de $f(x) = \cos(x)$ entre los valores 0 y π.



diccionario

0	$= 0°$
$\pi/2$	$= 90°$
π	$= 180°$
$\frac{3\pi}{2}$	$= 270°$
2π	$= 360°$

Area total entre 0 y π $= 2A$

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos(x) = F(\pi/2) - F(0) = \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(0)$$

$$= 1$$

$$\text{Area total} = 2A = 2 \cdot 1 = 2$$

Ojo: $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0) = 0$

"area = 0" $\longleftarrow$ área neta!!

área signada

Pregunta: $\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\int_0^7 \sqrt{f(x)}\,dx}\right) = ??$

derivada c/r a t

dónde hay t aquí ??

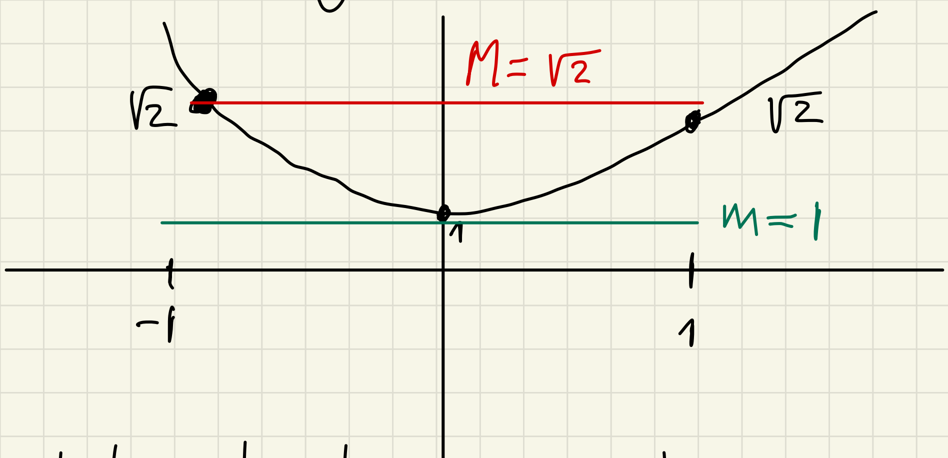
$\frac{d}{dt}(\text{algo sin } t) = 0$

$\frac{d}{dx}(\text{algo sin } x) = 0$

Problema: comprobar que

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$$

Sin hacer la integral. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$



Usar propiedades de la integral

Propiedad: Si $m \leq f \leq M$ en $[a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f\,dx \leq M(b-a)$$

En nuestro caso, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $a=-1$, $b=1$

$m = 1$, $M = \sqrt{2}$

$$1 \cdot (1-(-1)) \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{2}\,(1-(-1))$$

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$$