Clase 32:

Series: $\{a_n\}$: sucesion

$$S_n : \sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + \dots + a_n)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Cuándo existe??

Ej: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ existe sólo cuando $p > 1$

$\sum \frac{1}{n}$ no existe, $\sum \frac{1}{n^2}$ sí existe

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{no existe}, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

Tests:

1. Término general:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existe $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+n}$

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ no existe}}$$

útil

2. Test de la integral: Si $f:[1,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ es cont, pos, decr, $a_n = f(n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ existe} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ existe}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Test de comparación:

Ej: consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$. Se parece mucho a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \sum ar^{n-1}$$

$$\underset{a}{\frac{1}{2}} \qquad \underset{r}{\frac{1}{2}} \quad , \quad |r|<1$$

existe, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Notemos que

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{17} < \frac{1}{16}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Tomando n cada vez más grande

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} \leq 1 \text{ , existe}$$

Test de comparación:

Supongamos que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ son positivas

1) Si $b_n \geq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también

$b_n = \frac{1}{2^n}$ $a_n = \frac{1}{2^n+1}$

2) Si $b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también

Ej: determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$$

converge o no.

Sol: indicación: comparar con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2}$

$$= \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2} \text{ ??}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} \text{ existe}$$

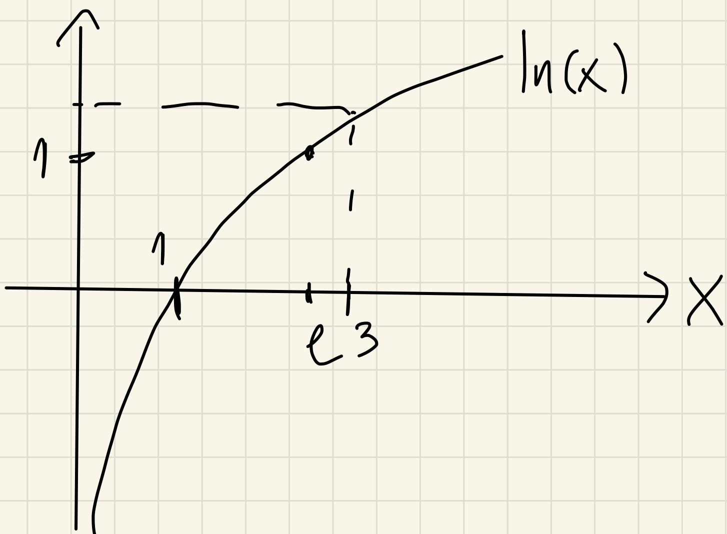
Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ existe

Ej: determine si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ existe o no.

Sol: Con el test de la integral, vimos que diverge.

Ahora, veamos que

$$\ln(n) > 1 \quad \text{Si} \quad n \geq 3$$



$$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}, \quad n \geq 3$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

armónica

luego,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \infty$$

Ojo: no importa que partimos de $n=3$. Si $\sum_{n=3}^{\infty} 1/n = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ tb.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\qquad \right)$$

$$> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \qquad > \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8}$$

$$> \frac{1}{2} \qquad > \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad + \frac{1}{2} \qquad + \frac{1}{2}$$

$$\geq \sum \frac{1}{2} = \infty$$

Otra forma: $f(x) = 1/x : [1, \infty) \to \mathbb{R}$

pos, cont, decr., $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ existe} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \text{ existe}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln|t| - \cancelto{0}{\ln|1|}\right)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \ln|t| = \infty$$

Ej: determine si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ existe o no.

Intento: $\displaystyle\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Qué obtuve $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \geq 1$$

Esto no me asegura que la serie exista.

Test comparación en límite:
Supongamos que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ son positivas.
Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

con $c > 0$ (finito), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

convergen al mismo tiempo

Ej: $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$, $b_n = \dfrac{1}{2^n}$, entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{2^n - 1}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{1/2^n}{1/2^n} = \frac{1}{1 - 1/2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 = c > 0.$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge.

Ej: determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ converge o no.

Sol: a_n = división de polinomios y raices

Lo que uno hace es mirar los grados

gr(numerador) = 2

$$gr(denom) = 5/2 \qquad \sqrt{\ } = (\quad)^{1/2}$$

Comparamos con $b_n = \dfrac{n^{gr(num)}}{n^{gr(denom)}} = n^{gr(num) - gr(denom)}$

$$= \frac{n^2}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

Aplicamos comparación en el límite:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\dfrac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}}{\dfrac{1}{n^{1/2}}} = \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} \cdot n^{1/2}$$

$$= \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{\sqrt{5+n^5}} \cdot \frac{\dfrac{1}{n^{5/2}}}{\dfrac{1}{n^{5/2}}}$$

$$= \frac{2+3/n}{\sqrt{5/n^2 + 1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2 = c > 0$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ converge si

y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ converge.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$

$p = 1/2$, no converge. Así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$$ diverge.

Ej: determine al ojo si la serie converge o no. Justifique sus respuestas en la prueba.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ converge, comparar con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2+3^n}$ converge, comparar con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

3. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$ diverge, comp con $\sum n^{2-3} = \sum \frac{1}{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(n)}{10^n}$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$0 \leq 1 + \sin(n) \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1 + \sin(n)}{10^n} \leq \frac{2}{10^n}$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(n)}{10^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

converge

converge

comparamos con

$$5.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$ diverge $n^{1/2-1} = n^{-1/2} = \frac{1}{n^{1/2}}$, $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge