Clase 31: series

$\{a_n\}$: sucesión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} S_n$$

Ejemplos importantes

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \text{no existe} & \text{si } |r| \geq 1 \quad a \neq 0 \\ \dfrac{a}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \quad a \neq 0 \end{cases}$$

Ej: Encuentre el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$

Sol:
Lo que uno quiere es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

necesitamos saber que ambas existe (tienen un valor finito).

Investigamos eso primero:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

Veamos las sumas parciales de esta última serie:

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

suma telescópica

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=3\cdot 1=3$$

la segunda serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$ es geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$a = 1/2$

$r = 1/2$

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

Luego, ambas series existen, así que

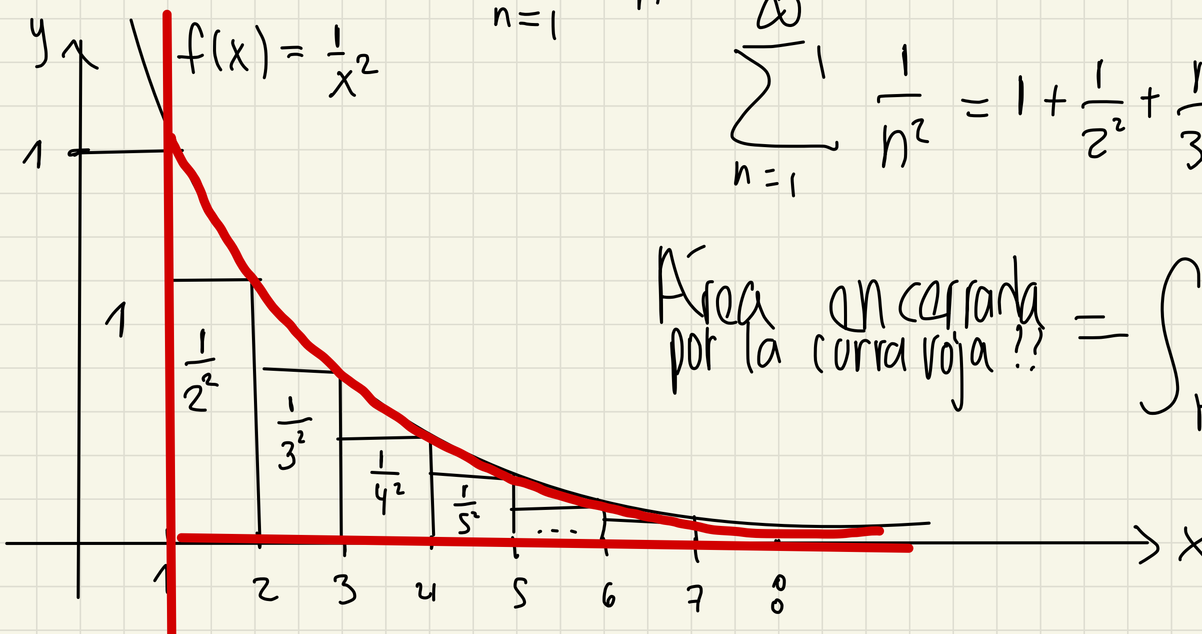
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 3 + 1$$

$$= 4$$

En gral es difícil calcular el valor exacto de una serie, por lo que a uno le interesa saber si existen o no!

Ej: determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ existe o no.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Área encerrada por la curva roja ?? $= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

$$\leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 + 1 = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1$$

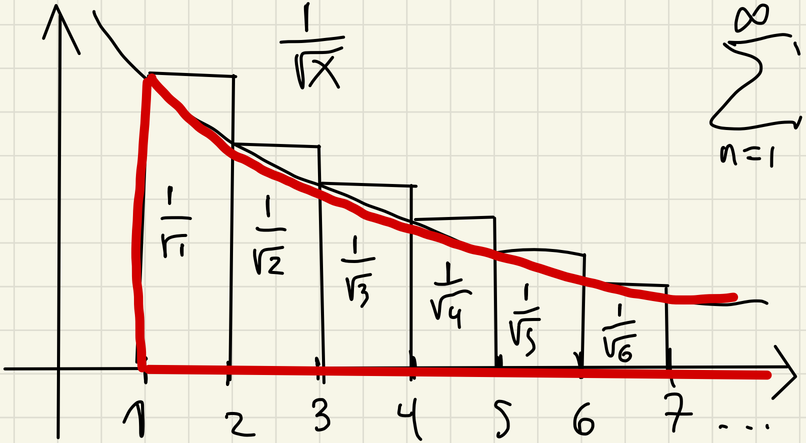
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ existe porque todos los términos son positivos.

($\{S_n\}$ es creciente (todos los términos son positivos), es acotada y por lo tanto, convergente)

Moraleja: usando áreas & integrales impropias podemos ver si una serie existe o no.

Ej: determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ existe o no.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \text{suma áreas } \square\text{'s}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\|$$

$$\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ no existe

Criterio general:

Supongamos que f es continua, es positiva, es decreciente en $[1, \infty)$, y llamemos

$$a = f(n)$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ existe} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ existe}$$

En otras palabras

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge

o

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge

Acotación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{Convergen} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=100}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=10^{10}}^{\infty} a_n \quad \Bigg\} \text{ o divergen simultaneamente}$$

$$\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Por qué es importante esto??

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

deshacerse de ese no cambia la convergencia.

Ejemplo: determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ es convergente o no.

Sol: miramos

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad a_n = f(n) = \frac{1}{n^2+1}$$

cont, pos, decr. ✓✓

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) \text{ converge}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = ??$$

$$\cancel{\tan^{-1} x = \frac{1}{\tan x}}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad \text{existe}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \text{ existe} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ existe.}$$

Ej: determine para que valores de p la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ existe.

Sol:

- $p < 0$ ($p \overset{ej:}{=} -2$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$

no existe, por el test de la blancura (test del término que se va a cero)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ existe} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

En nuestro caso, $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ no existe.

Lo mismo vale para cualquier $p<0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ no existe si } p<0$$

- $p=0$. $\frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^0} = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = (1+1+1+1 \ldots$

$=$

$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$, así que no existe.

- Si $p \in (0,1]$ $(p = 1/2)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ no existe (ya lo vimos)

comparar con $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, que no existe

Si $p \in (0,1]$. Luego, la serie tampoco existe

- $p > 1$, entonces comparando con la integral,

Sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ existe si $p > 1$,

por lo tanto la serie también.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ existe sólo si } p > 1}$$

Ej: determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge o no.

Sol: comparamos con la integral $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

Obs: $f(x) = (\ln x)/x$ es continua,

es positiva (no negativa),

es decreciante?? Hay que verlo con cuidado.

Cómo uno ve si una función es decr??

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$1 - \ln x < 0 \quad \text{si} \quad x > e$$

Entonces $f'(x) < 0$ si $x > e$

$\approx 2{,}7 < 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \rightsquigarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx \overset{\text{ejercicio}}{=} \infty$$

Así que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln}{n}$ diverge.