Clase 30: Series

Sucesiones: $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Ej: $a_n = \frac{1}{n}$

$a_n = (-1)^n$

Pregunta: sabemos sumar cosas como

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{50}$$

Podemos sumar la lista completa??

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{50} + \dots + a_n + \dots$$

A este tipo de sumas infinitas se les llama series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{o} \quad \sum a_n$$

Qué pasa en distintos ejemplos?

$a_n = n$ $\qquad$ $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

La sumas de los términos son

1

$1+2=3$

$1+2+3=6$

$1+2+3+4=10$

$1+2+3+4+5=15$

$\vdots$

va aumentando cada vez más rápido.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n = (1+2+3+4+\ldots+100+\ldots)$$

$$= \infty$$

Suma de los primeros n naturales:

$$S_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Si n es c/ vez más grande, la suma también lo es

Otro ejemplo

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ??$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Esto se puede demostrar por inducción

La idea es que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

La definición es entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$$

Uno lo puede escribir de otra forma:

Construimos $\{S_n\}$ de la siguiente forma:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe. Si no existe, decimos que la serie diverge

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge

Progresiones geométricas: Sucesiones de la forma

$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$

Por ejemplo $a_n = \frac{1}{2^n}$ es geométrica

$a = \frac{1}{2}$ $r = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

Cómo sumamos las sucesiones geométricas?

$a_n = ar^{n-1}$

Suma? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = ??$ $\quad a \neq 0$

Las sumas parciales

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a + ar$$
$$S_3 = a + ar + ar^3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a + \dots + ar^{n-1}$$

Vamos a encontrar una expresión para S_n

El truco es:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a - ar^n$$

$$\boxed{S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}}$$

Lo único que falta es tomar el límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r}$$

¿Cuál es el valor de este límite? Varios casos:

- Si $r = 1$, claramente hay un problema:

La sucesión es entonces

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \ldots, \quad ar^{n-1}$$

$$a, \quad a, \quad a, \quad a, \ldots \quad a,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a = (a + \ldots + a) = na \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & a=0 \\ \infty & a>0 \\ -\infty & a<0 \end{cases}$$

- Si $|r| < 1$

$$|r|<1 \Rightarrow r^n \to 0$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

Ej: $r = \frac{1}{2}$ $\quad r^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - \cancel{ar^n}^{\to 0}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Este es el caso más importante!!

- $|r|>1$ $\quad S_n = \dfrac{a - ar^n}{1-r}$

Ej: $\begin{cases} r=2 & r^n = 2^n \nearrow \infty \\ r=-3 & r^n = (-3)^n \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe

en ambos casos $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ diverge}$$

En síntesis $(a\neq 0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{converge si } |r|<1 \\ \text{diverge si } |r|\geq 1 \end{cases}$$

Ejemplos: calcule el valor de la serie

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$$

Sol: veamos esto como una sucesión geométrica.

$a = 5$ $\qquad (a, ar, ar^2, ar^3, \dots$

$$5, \ -5 \cdot \frac{2}{3}, \ 5 \cdot \frac{4}{9}, \ -5 \cdot \frac{8}{27}, \dots$$

$$5, \ 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right), \ 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2, \ 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3, \dots$$

$r = -2/3$

La serie es convergante cuando $|r| < 1$

$r = -2/3 \qquad |r| = |-2/3| < 1$

La serie entonces converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1 - -2/3} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

Ej: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ converge o no?

$$a_n = 2^{2n} 3^{1-n} = (2^2)^n \cdot \frac{3}{3^n} = \frac{4^n}{3^n} \cdot 3$$

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

tiene esa forma

$$\boxed{a \cdot r^{n-1} = a_n}$$

$a = 4$ $\quad r = \frac{4}{3}$ $\quad |r| \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Propiedades:

Asumiendo que todas las series involucradas existen:

- $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge o no?

Miramos las sumas parciales

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \underset{> \frac{1}{8}}{\frac{1}{6}} + \underset{> \frac{1}{8}}{\frac{1}{7}} + \underset{> \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_{16} = \dots\dots \qquad > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \infty$$

Esto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Test de la blancura

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ojo: no dice que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Este es un test para probar divergencia:
Se usa de la siguiente forma:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Ej: demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

Test de la blancura:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Por el test, la serie diverge.

No ejemplo: $a_n = \frac{1}{n}$, uno tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge.