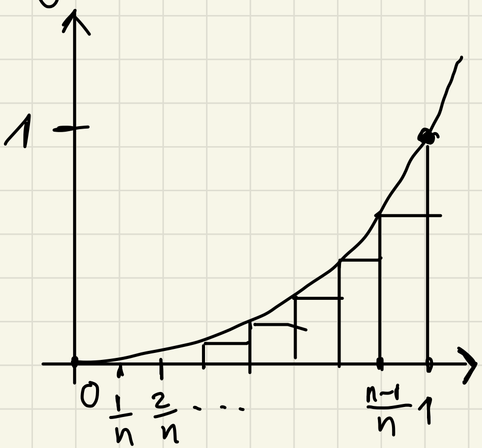
Clase 3: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim \text{ sumas }(\text{Alto} \cdot \text{ancho})$

Ejemplo:



$f(x) = x^3$, queremos $\int_0^1 x^3\,dx$

Pista: $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Dividimos $[0,1]$ en n intervalos de igual largo $(= 1/n)$, y evaluamos f en el extremo derecho.

Cuáles son los intervalos chicos??

$$\left[0, \tfrac{1}{n}\right], \left[\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right], \left[\tfrac{2}{n}, \tfrac{3}{n}\right], \dots, \left[\tfrac{n-1}{n}, 1\right]$$

Extremo derecho

f(cada extremo derecho): $f(x) = x^3$

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^3$$

$$f\left(\tfrac{2}{n}\right) = \left(\tfrac{2}{n}\right)^3$$

$$f\left(\tfrac{3}{n}\right) = \left(\tfrac{3}{n}\right)^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3$$

$$f(1) = 1^3$$

Alturas de c/u de los $\square$'s

Queremos $\sum^{1}$ altos · anchos

$$= \left(\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3\right)$$

$$= \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{n^4} \cdot \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

Qué pasa cuando $n \to \infty$??

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{(1+0)^2} \Leftarrow \left(1+\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1} = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{n^4} \cdot \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}}$$

Ejercicios:

- $\int_0^1 e^x \, dx$ || Pista: $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - 1}{n} = 1$

- $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ || Pista: NO usar sumas, pensar gráficamente

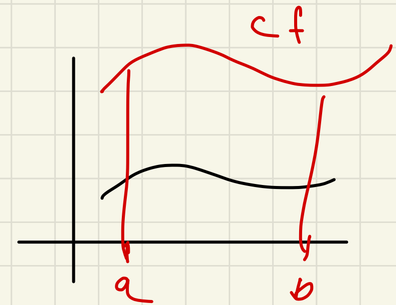
  Pista 2: recordar qué significa $x^2 + y^2 = 1$

Propiedades de $\int$:

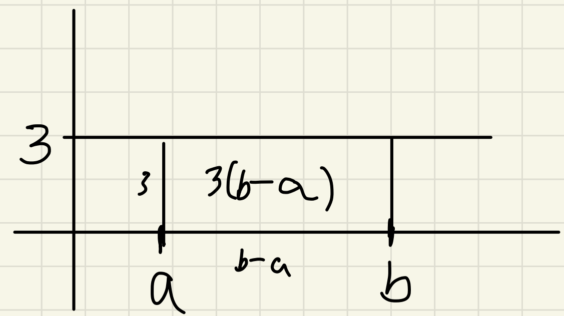
1. $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$

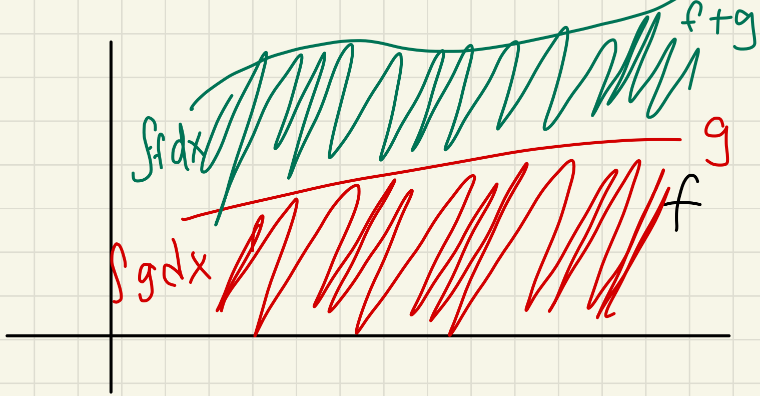


4. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$



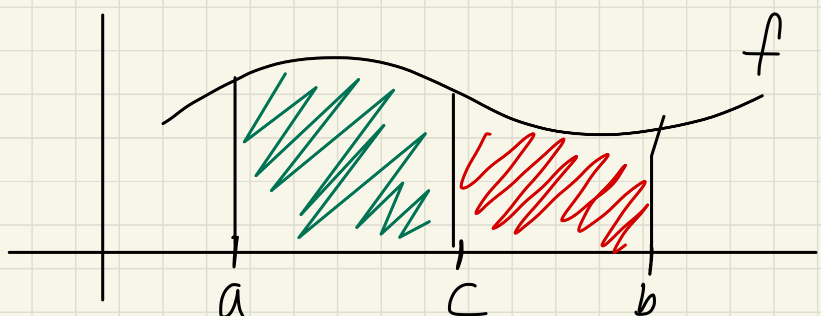
5. $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$



6. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

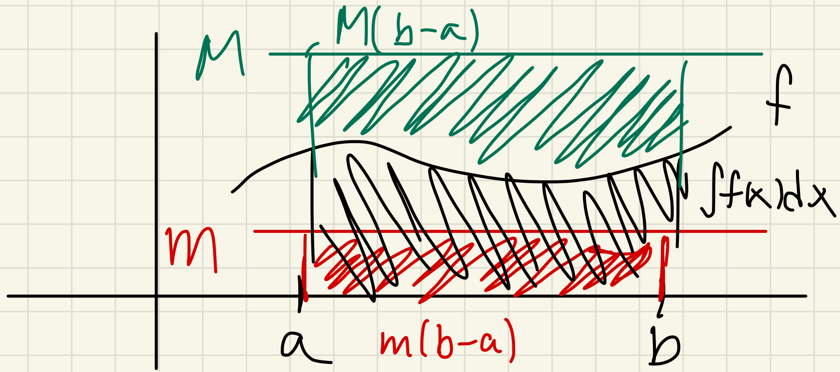
$a \le c \le b$



7. Si $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \geq 0$

8. Si $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx$

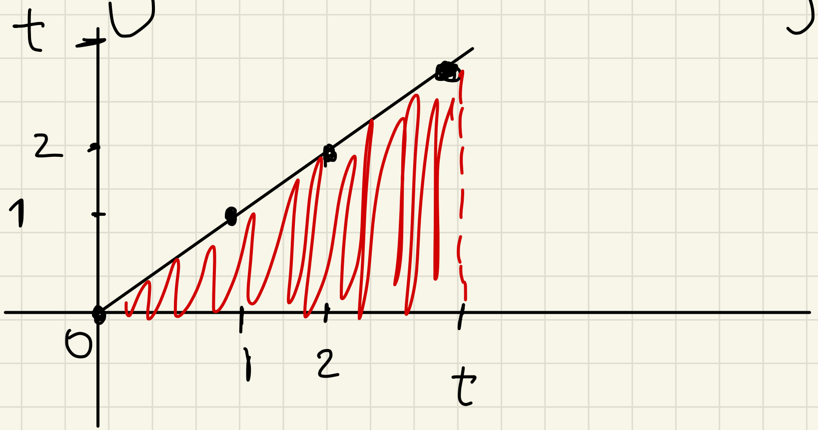
9. Si $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$



Ejemplo:

Tomemos $f(x) = x$, calcular $\int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t x\,dx$

Pensar gráficamente:



$$\int_0^t f(x)\,dx$$

$=$ área bajo f entre 0 y t

$$= \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$$

$$= \frac{t^2}{2}$$

Podemos ver que la función

$$t \longmapsto \int_0^t f(x)\,dx$$

es "bonita", no es cualquier cosa:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t x\,dx = t^2/2$$

y además,

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\left(t^2/2\right) = t = f(t)$$

Sospechoso!!

Ejemplo (invito a completar detalles, ejercicio):

$f(x) = x^2$, calcular $\int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t x^2\,dx$

(hacerlo con sumas de Riemann = $\sum$ alto · ancho)

$$F(t) = \int_0^t x^2\,dx \overset{\text{spoilers}}{=} \frac{t^3}{3}$$, uno observa que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{3t^2}{3} = t^2 = f(t)$$

Esto es un fenómeno muy general:

Teorema Fundamental del cálculo (TFC), parte 1:

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, entonces la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, definida por

$$F(t)=\int_0^t f(x)\,dx \qquad a\leq t\leq b$$

es continua en $[a,b]$, y es diferenciable en (a,b) y además

$$F'(t)=\frac{dF}{dt}=f(t)$$

derivada(integral(algo)) = algo

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$

Dividimos $[0,t]$ en n subintervalos de igual largo $(= t/n)$

Los intervalos son:

$[0, t/n]$, $[t/n, 2t/n]$, $[2t/n, 3t/n] \cdots [\frac{n-1}{n}t, \frac{n}{n}t]$

ancho $= t/n$

Alturas, usamos el extremo derecho:

f(extremo derecho): $\left(f(x) = x^2\right)$

$f(t/n) = (t/n)^2$

$f(2t/n) = (2t/n)^2$

$f(3t/n) = (3t/n)^2$

$\vdots$

$f\left(\frac{n-1}{n}t\right) = \left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)^2$

$f\left(\frac{n}{n}\cdot t\right) = \left(\frac{n}{n}t\right)^2$

$\sum$ anchos · altos

$$= \left(\frac{t^2}{n^2}\cdot\frac{t}{n} + \left(\frac{2t}{n}\right)^2\cdot\frac{t}{n} + \dots + \left(\frac{nt}{n}\right)^2\cdot\frac{t}{n}\right)$$

$$= \frac{t^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right)$$

$$= \frac{t^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Cuando $n \to \infty$, $= \dfrac{t^3}{6} \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$

$\dfrac{1}{n} \downarrow 0$ $\quad \dfrac{1}{n} \downarrow 0$

$= \dfrac{t^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = t^3/3$

$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t x^2\,dx = t^3/3$

$F'(t) = t^2 = f(t)$ tal como dice el TFC!!

Pregunta: si $F(t) = \int_0^t \sqrt{\tan x}\,dx$, $F'(t) = ?$

El TFC dice derivada (integral (algo)) = algo, o sea

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,dx = f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \sqrt{\tan x}\,dx\right) = \sqrt{\tan t}$$

hicimos esto sin calcular la integral $\int \sqrt{\tan x}\,dx$!!

$f(x) = \sqrt{\tan x}$ $\quad f(t) = \sqrt{\tan t}$

Pregunta: Si $F(t) = \int_0^{t^2} \operatorname{sen}(x)\,dx$, calcular $F'(t)$?

Ojo, $\int_0^{t^2}$, no $\int_0^{t}$ ¡¡¡!!!

Recordemos la regla de la cadena:

$\rightarrow \frac{d}{dt}(h(g(t))) = \underline{h'(g(t))} \cdot \underline{g'(t)}$

Ej: $(e^{x^3})' = ??$ $\quad h(x) = e^x$, $g(x) = x^3$

$h(g(x)) = e^{x^3}$ $\quad h'(x) = e^x$, $g'(x) = 3x^2$

$h'(g(x)) = e^{x^3}$

$$\frac{d}{dt}(h(g(x))) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3e^{x^3}x^2$$

$$F(t) = \int_0^{t^2} \operatorname{sen}(x)\,dx$$ = composición de dos cosas que entendamos

$$\left.\begin{aligned} h(t) &= \int_0^{t} \operatorname{sen}(x)\,dx \\ g(t) &= t^2 \end{aligned}\right\} \; h(g(t)) = \int_0^{t^2} \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$= F(t)$$

$$F'(t) = (h(g(t)))' = \underline{h'(g(t)) \cdot g'(t)}$$

$$h'(t) = \operatorname{sen}(t) \quad , \quad h'(g(t)) = h'(t^2) = \underline{\operatorname{sen}(t^2)}$$

$$g'(t) = \underline{2t}$$

$$F'(t) = \operatorname{sen}(t^2) \cdot 2t$$

Extensión del TFC

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{g(t)}^{h(t)} f(x)\,dx = f(h(t))\cdot h'(t) - f(g(t))\cdot g'(t)}$$

más general que el TFC

$$\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} \operatorname{sen}(x)\,dx = \operatorname{sen}(t^2)\cdot 2t - \cancel{\operatorname{sen}(0)\cdot 0}$$

$$= \operatorname{sen}(t^2)\cdot 2t$$

Recomendación: leer los ejemplos que

hicimos, con calma, seguir c/u de los pasos que hicimos y ver por qué funcionan c/u de esos pasos.

fel.prz@gmail.com