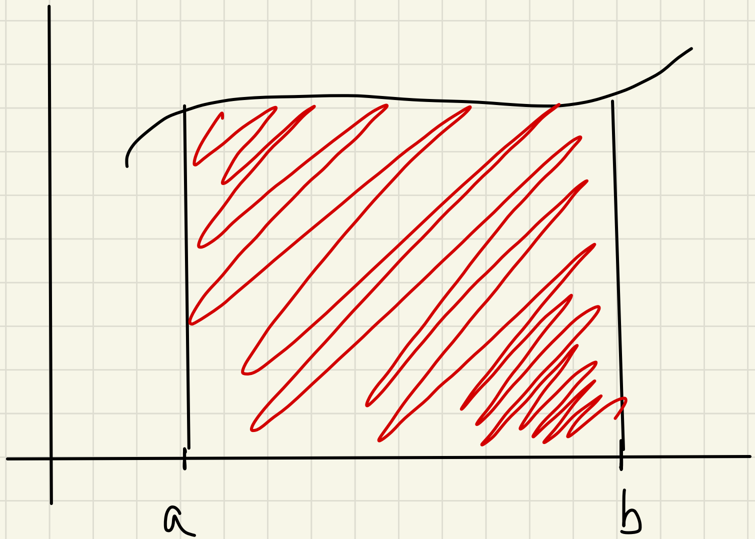
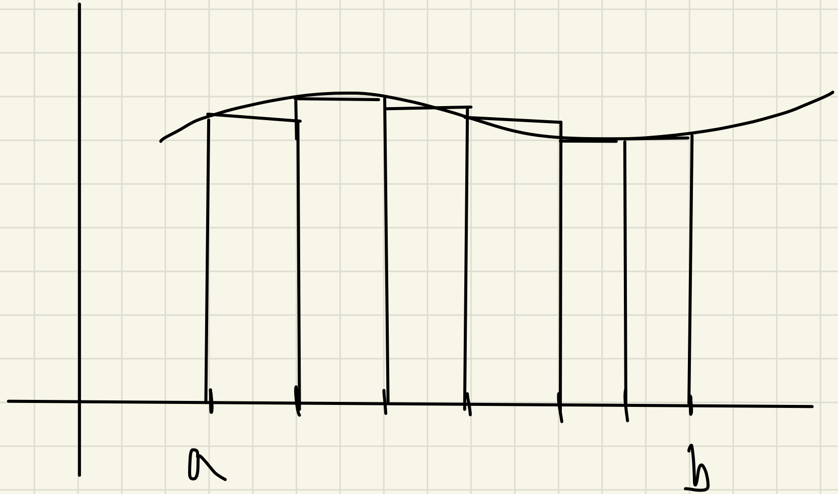
Clase 28: Repaso

1er tema: construcción de la integral



Idea: dividimos $[a,b]$ en intervalos chicos y hacemos rectángulos



Area entre a y b $\approx$ Suma área $\square$'s

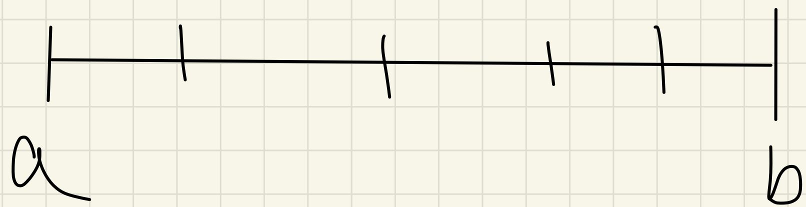
¿Cuál es el ancho y cuál la altura?

Ancho: $\Delta X = \dfrac{b-a}{n}$

n: número de intervalos en que dividimos $[a,b]$

Alto: f(extremo de c/ intervalo)

Extremo izq: $a + k\Delta x \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \\ a+\Delta x \\ a+2\Delta x \\ \vdots \\ a+(n-1)\Delta x \end{array} \right.$



Área $\square$'s usando extremo izq:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x \cdot f(a + k\Delta x)$$

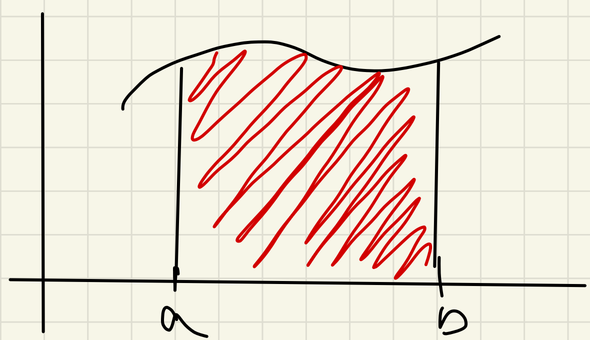
Esto se puede calcular en algunos casos.

La aproximación mejora cuando n se hace c/ vez más grande

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{:=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x$$

Interpretación:

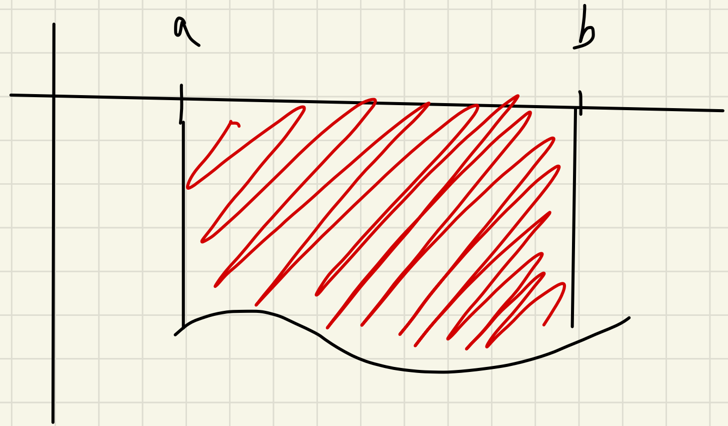
Si $f \geq 0$



$\int_a^b f(x)\,dx$

= Área entre f y el eje x, entre a y b

Si $f \leq 0$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{ Área roja}$$

El problema:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área verde} - \text{Área roja}$$

Si uno quiere el área total $= \int_a^b |f(x)|\,dx$

Prop:
- $\int_a^b f + g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$
- $\int_a^b c \cdot f\,dx = c \int_a^b f\,dx$
- $\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a)$

- Si $m \leq f \leq M$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f\,dx \leq M(b-a)$$

- $\int_a^a f\,dx = 0$

- $\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$

- Si $a < c < b$ $\quad \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx = \int_a^b f\,dx$

La principal herramienta para calcular integrales es el TFC

TFC (Asumiendo que f y F son bonitas)

1. $\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(x)\,dx\right) = f(t)$

2. Si $F' = f$ (F es una anti-derivada de f),

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: si $f(x) = \cos(x)$ $\quad F(x) = \operatorname{sen}(x)$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1$$

$\int f\,dx \qquad F(b) - f(a)$

Obs: $$\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} f(x)\,dx \neq f(t^2)$$

$$= f(t^2)\cdot(t^2)'$$

$$= 2t\,f(t^2)$$

Aún con el TFC puede ser difícil calcular ciertas integrales. Hay más herramientas para ayudar con esto: técnicas de integración.

El problema central es dada una f, encontrar F tal que $F' = f$; esto lo denotamos

$$\int f\,dx \quad : \text{ integral indefinida.}$$

1. Regla de sustitución

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

$$u = g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \rightsquigarrow du = g'(x)\,dx$$

$u = x^2 \quad du = 2x\,dx$

Ej:

$$\int 5e^{x^2}x\,dx = \frac{5}{2}\int \underbrace{e^{x^2}}_{e^u}\cdot\underbrace{2x\,dx}_{du}$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$= \frac{5}{2}\int e^{x^2}\cdot(x^2)'\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\int e^u\,du = \frac{5}{2}\left(e^u + C\right)$$

$$= \frac{5}{2} e^{x^2} + C$$

Heurística: u = lo más complicado

Obs: aquí fue obvio que

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Porque $(e^x)' = e^x$.

No para todas las funciones es tan fácil; algunas hay que sabérselas de memoria

Saberse la tabla de integrales que les subí.

2. Integración por partes.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ej:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx$$

$u = x \quad dv = e^x \, dx$

$du = dx \quad v = e^x$

$$= x e^x - e^x + C$$

Heurística: Elegir el u según ILATE

I: inversas: (arctan, arcsen,

L: Logaritmos,

A: funciones algebraicas $(x^2, x^3, x, \ldots)$

T: trigonométricas (sen, cos, tan, sec, ...)
E: exponenciales

3. Sustituciones trigonométricas:

La idea es la mismas que con sustitución solo que a veces uno quiere hacer sust de la forma

a) $u = \operatorname{sen}(x)$ ó b) $x = \operatorname{sen}(u)$

a) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,dx = \int u^2\,du = \dfrac{u^3}{3} + C$

$u = \operatorname{sen}(x)$

$du = \cos(x)\,dx$

$= \dfrac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} + C$

b) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$x = \operatorname{sen}(u)$

$dx = \cos(u)\,du$

Identidad Trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$x = \operatorname{sen}(u) \qquad 1 - x^2 = 1 - \operatorname{sen}^2(u)$$

$$= \cos^2(u)$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2(u)} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Asumiendo}\\ \text{que}\\ \cos(u) > 0\end{array}\right)$$

$$= \cos(u)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cos(u)} \cos(u)\,du$$

$$= \int 1\,du = u + C$$

$$= \operatorname{arcsen}(x) + C$$

$x = \operatorname{sen}(u) \qquad u = \arcsin(x)$

4. Fracciones parciales:

Idea $\qquad p, q$ polinomios

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{x}{(\quad)} + \cdots$$

Ej: $$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

no hay x

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{x(A+B)+(B-A)}{(x-1)(x+1)}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B \qquad A=-1/2$$

$$B-A=1 \Rightarrow 2B=1 \qquad B=1/2$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

Hay varios casos y sutilezas

- Grado arriba > grado abajo:

$$\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}$$

Hacer división de polinom.

- Raices repetidas

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{r/c}$$

$$x^2\Big(\qquad\qquad\Big) + x\Big(\qquad\qquad\Big) + \Big(\qquad\qquad\Big)$$

$$\qquad\quad = 0 \qquad\qquad\quad = 0 \qquad\qquad\quad = 1$$