Clase 27: más sucesiones

Ej: $a_n = n!/n^n = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\, n\, n \cdots n}$

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$$

$n \to \infty$ $\qquad$ $n \to \infty$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$$

$$\Downarrow$$

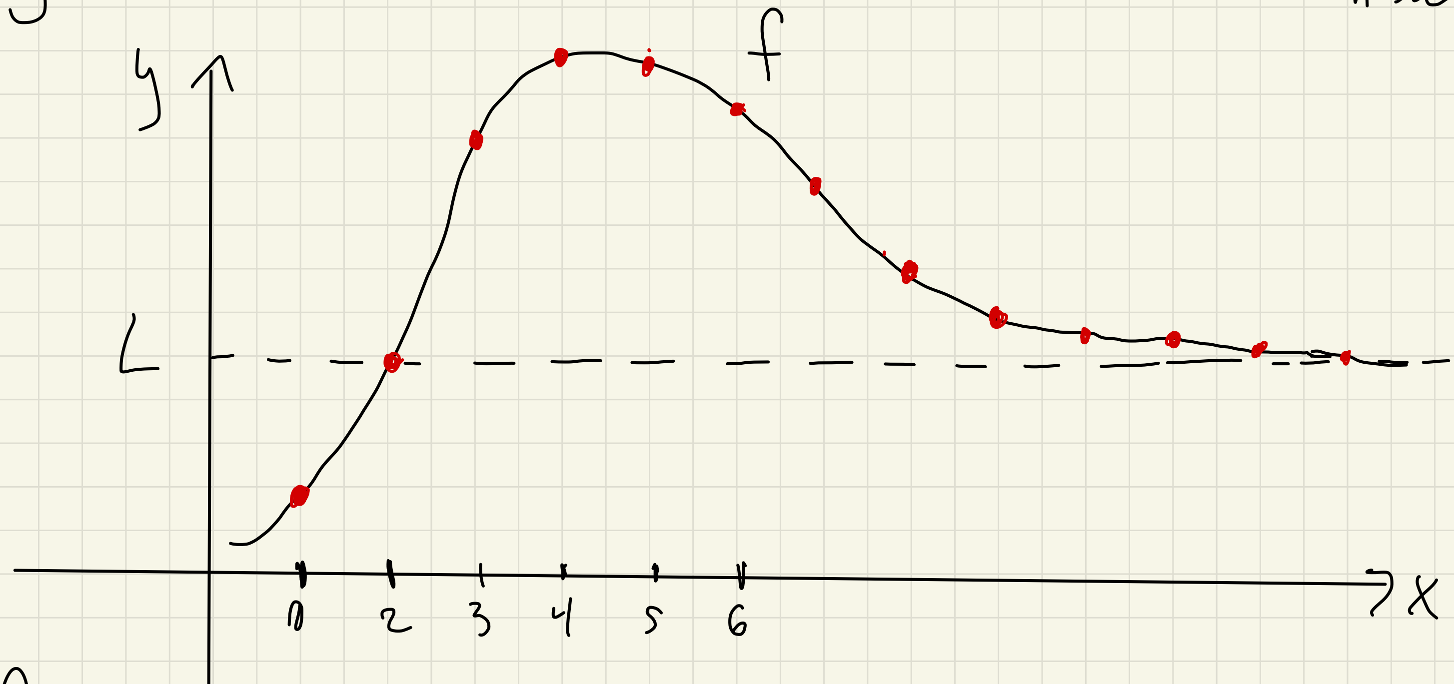
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
1 \leq n & & \frac{1}{n} \leq 1 \\
2 \leq n & \ldots & \frac{2}{n} \leq 1 \\
\vdots & & \vdots \\
n \leq n & & \frac{n}{n} \leq 1
\end{array}\right\} \text{multipli todas}
$$

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq 1 \quad / \cdot \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Teo: si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$



Para qué sirve?

Ej: calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

Sol: veamos $\frac{\ln x}{x}$. Cuando $x \to \infty$, $\ln x \to \infty$ y $x \to \infty$, por los que nos queda ∞/∞, condiciones para usar L'Hopital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por el teo recién mencionado, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Cuál fue la ventaja? Pudimos usar L'Hopital.

Ej: Para qué valores de r la sucesion $\{r^n\}$ converge?

Sol: $r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ veces}}$

$0{,}5 \cdot 0{,}5$

$0{,}25$

$\overset{\shortparallel}{\text{ans}} \cdot 0{,}5$

$\vdots$

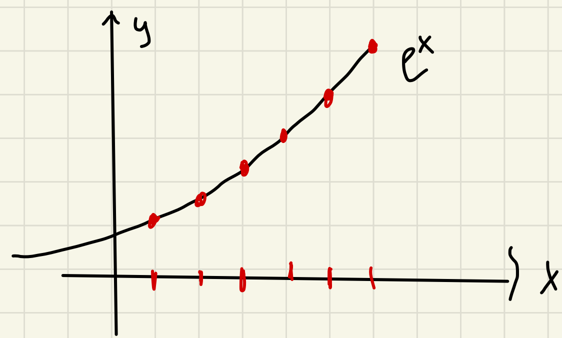
- $r = 0 \Rightarrow r^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$
- $r = 1 \Rightarrow r^n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 1$

- $r > 1$ (Ej: $r = 2$ $\quad \{r^n\} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots\}$)

$r^n \nearrow$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$$

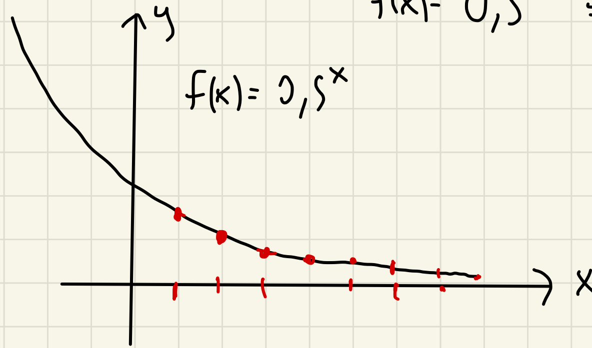
r^x (Ej: 2^x, e^x, 3^x)



- $r \in (0,1)$. $0 < r < 1$

(Ej: $r = 0{,}5$ $\quad \{r^n\} = \{0{,}5,\ 0{,}25,\ 0{,}175,\ \dots\}$
$r_n \searrow$ $\qquad f(x) = 0{,}5^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$)

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$



- Si $\quad -1 < r < 0 \Rightarrow 0 < |r| < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0 = \lim_{n\to\infty} |r^n|$$

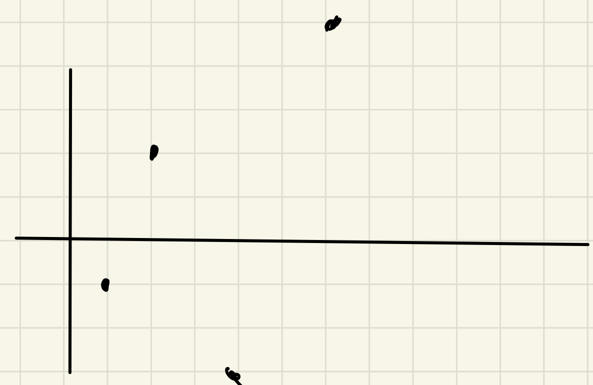
Me dijo que $\lim_{n\to\infty} |r^n| = 0$, un teo anterior dice

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

- $r = -1 \Rightarrow r^n = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases}$ $\quad \lim_{n\to\infty} r^n$ no existe.

- $r < -1 \Rightarrow r^n = (-1)^n \cdot |r|$

$\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe



La suc. $\{r^n\}$ converge sólo cuando:

$$-1 < r \leq 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Hemos visto sucesiones de la forma

baja sube sube no se decide

Estas propiedades son importantes:

1. Una suc. a_n es estrictamente creciente si

$$a_n < a_{n+1}$$

2. Una suc a_n es estrictamente decreciente si

$$a_n > a_{n+1}$$

3. Si a_n es creciente/decrec., decimos que es monótona.

Ej: la suc $a_n = \dfrac{3}{n+5}$ es decreciente.

$$a_{n+1} = \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6} < \frac{3}{n+5} = a_n$$

Esto es obvio

$$3(n+5) < 3(n+6)$$
$$3n+15 < 3n+18$$
$$15 < 18$$

Esto es más obvio

Ej: muestre que $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ es decreciente

Sol: queremos mostrar que $a_n > a_{n+1}$

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+1)^2+1}$$

Si $a_n > a_{n+1}$ $$\frac{n}{n^2+1} > \frac{(n+1)}{(n+1)^2+1}$$

$$n[(n+1)^2+1] > (n+1)(n^2+1)$$

$$n^3+2n^2+2n > n^3+n^2+n+1$$

$$n^2+n > 1$$

Es verdad porque $n \geq 1$

Ahora nos fijamos que nos podemos devolver

$$n^2 + n > 1 \qquad \text{porque } n \geq 1$$

$$n^3 + 2n^2 + 2n > n^3 + n^2 + n + 1$$

$$n[(n+1)^2 + 1] > (n+1)(n^2+1)$$

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = a_{n+1}$$

lo que prueba que a_n es decreciante.

Atanción: este método es peligroso:

Probamos que $1 = 2$

Si $1 = 2$ $\quad 1 \cdot 0$

$\Rightarrow 1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$

$\Rightarrow 0 = 0$ es verdad!!

No todos los pasos son reversibles:

$0 = 0$ es verdad ✓✓

$\Rightarrow 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$ es verdad ✓✓

$\Rightarrow$ $1 = 2$

no es verdad, no se sigue de lo anterior porque necesita dividir por cero (para cancelarlo)

Otro ejemplo

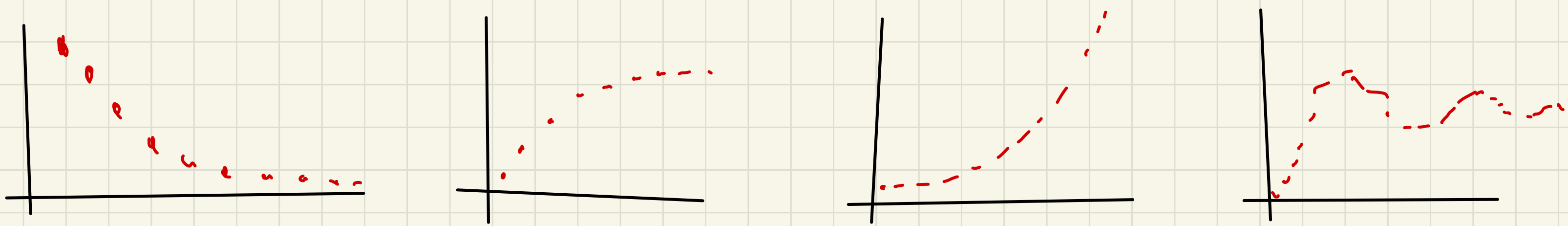
Si $a < b$ y $b < c$

entonces $a < c$

Ej: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

$$1 < 2 \, , \quad 2 < 3 \implies 1 < 3$$

$$(a < b, \, b < c) \implies (a < c)$$

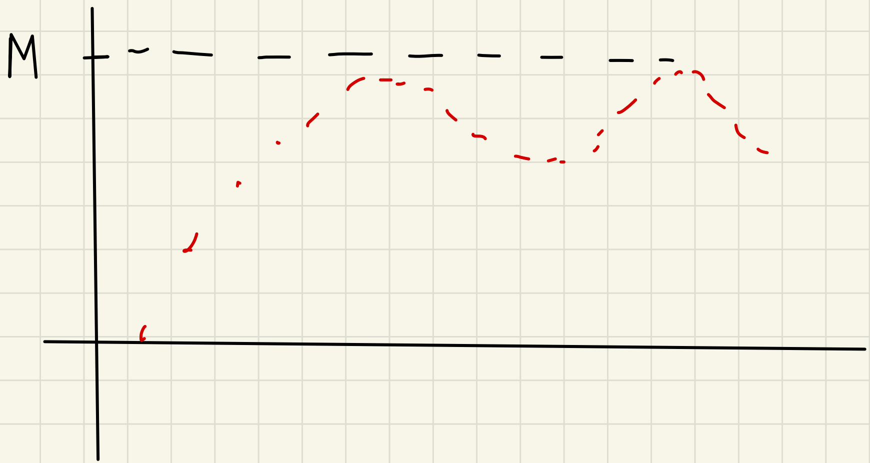


Otra prop importante:

1. Una suc. a_n es acotada superior %

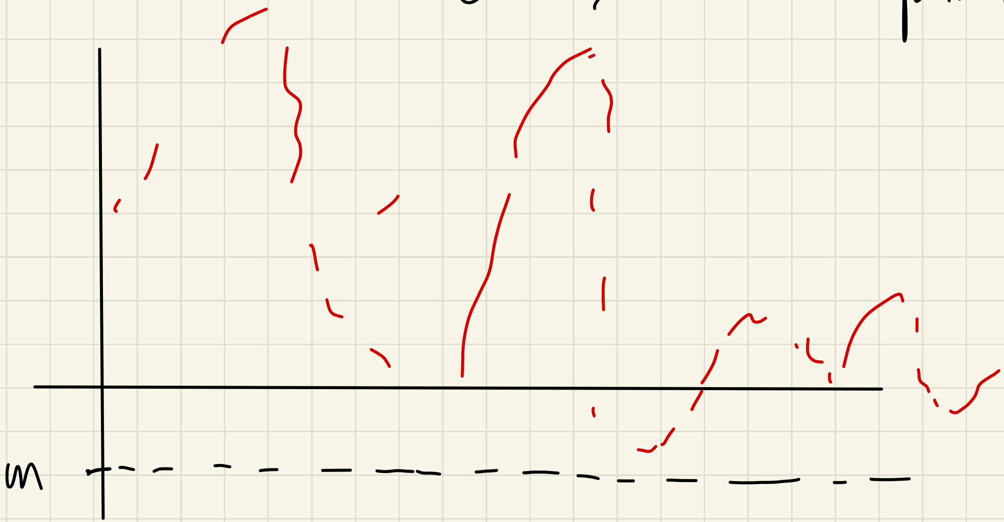
Si existe M tal que

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n$$

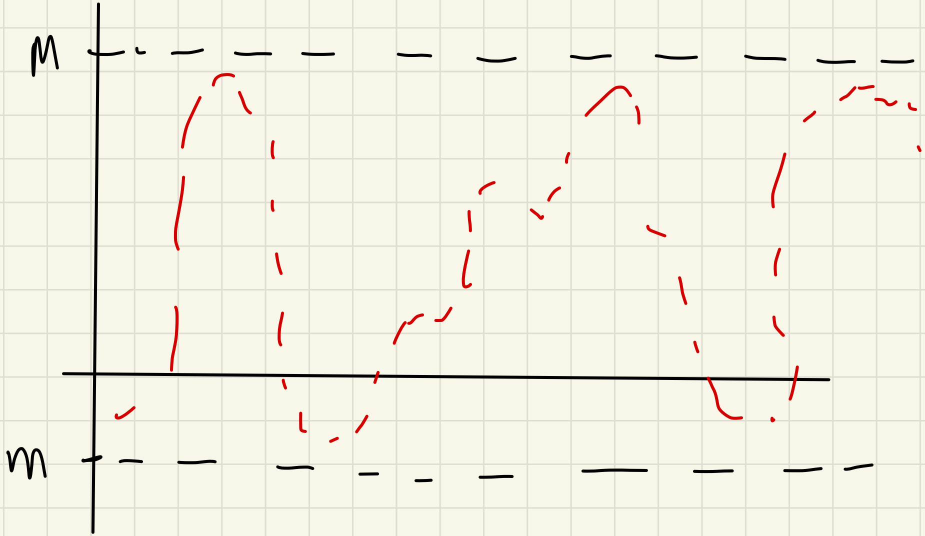


2. La suc (a_n) es acotada inferiormente si existe m tal que

$a_n \geq m$ para todo n

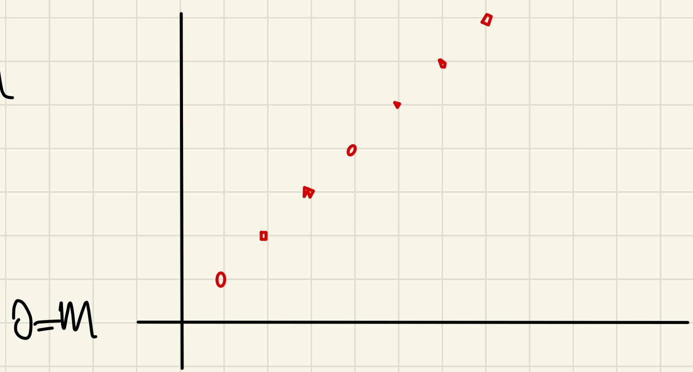


3. Una suc es acotada si lo es inferior y superiormente:



Ej: $a_n = n$

$a_n \geq 0$



es acotada inferior%.

es acotada superior%.?

No

Si lo fuera, habría un M tal que

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n$$

Si yo miro $a_{M+1} = M+1$ $(a_n = n)$

$$M+1 \leq M$$

$$1 \leq 0$$ no es cierto

Por lo tanto, a_n no puede ser acotada superior %.

Ej: $a_n = \frac{n}{n+1}$

$a_n > 0 = m$ acotada inferior. ✓✓

Preg: es acotada superior. ?? Si, $M = 1$

$$\frac{n}{n+1} < 1$$

$$n < n+1$$

$$0 < 1$$

Preg: es a_n creciente? Sí

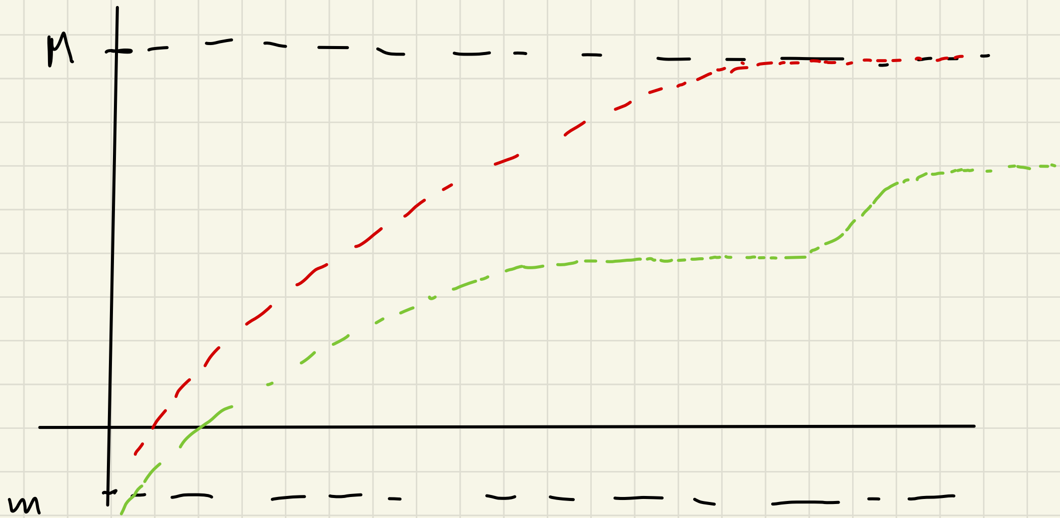
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} = a_n$$

$$(n+1)(n+1) > n(n+2)$$

$$n^2+2n+1 > n^2+2n$$

$$1 > 0$$

Teo: Si a_n es acotada y monótona, entonces es convergente.



Ej: defina a_n mediante

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 6) = \frac{1}{2}(2+6)$$

$$= \frac{1}{2} 8 = 4$$

Ej:
- Escriba los primeros términos de a_n.
- Estudie si a_n es monótona.
- Estudie si a_n es acotada.
- Estudie $\lim_{n \to \infty} a_n$.