Clase 26: repaso de sucesiones

Sucesión: lista de números escritos en un orden dado:

Ej:

$a_n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ números naturales

$a_n = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ números pares

$a_n = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ números primos

10 no es primo: $10 : 2 = 5$, $10 : 5 = 2$ // $11 : 11 = 1$, $11 : 1 = 11$

$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ inversos de los naturales

$$a_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \cdots \frac{1001}{1002} \cdots \frac{n}{n+1}$$

1er 2do 3ero 4to 5to ... 1001avo ... n-avo

$= ?$

Toda la información relativa a la sucesión se puede encapsular diciendo

$$a_n = \left\{ \frac{n}{n+1} : n = 1, 2, \dots \right\} = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \geq 1 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

En general, así es como queremos escribir la sucesiones, mostrando cuál es la expresión que genera sus términos.

En el ej anterior, la expresión es $n/_{n+1}$

Obs: eso no siempre se puede

Ej: $a_n = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ (números primos)

No se conoce un término como el del ej anterior que genere los elementos de la

Sucesión.

Otros ejemplos:

$$a_n = \{\sqrt{n-3} : n \geq 3\}$$

$$= \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2, \sqrt{5}, \ldots\}$$

$$a_n = \{(-1)^n : n \geq 1\}$$

$n=1, (-1)^1 = (-1)$

$n=2, (-1)^2 = 1$

$n=3 = (-1)^3 = -1$

$$= \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$$

Problema inverso: dada una lista de nums proponer una expresión que genere esos números:

$$a_n = \left\{ \frac{\overset{1+2}{3}}{\underset{5^1}{5}}, -\frac{\overset{2+2}{4}}{\underset{5^2}{25}}, \frac{\overset{3+2}{5}}{\underset{5^3}{125}}, -\frac{\overset{4+2}{6}}{\underset{5^4}{625}}, \frac{\overset{5+2}{7}}{\underset{5^5}{3125}}, \ldots \right\}$$

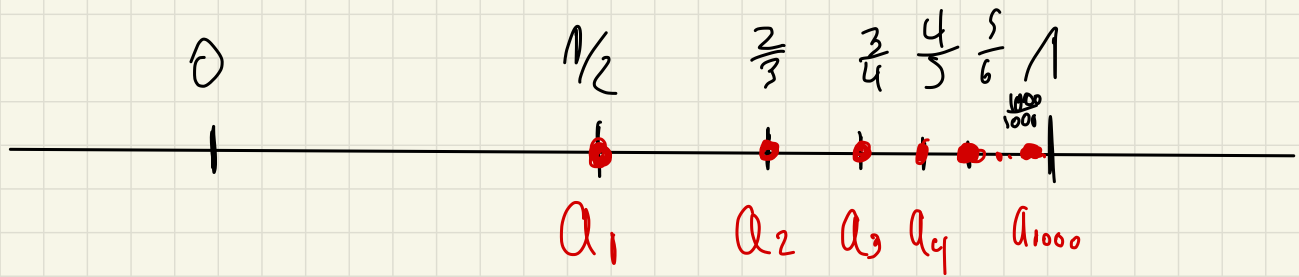
$$= \left\{ (-1)^{n+1}\left(\frac{n+2}{5^n}\right) : n \geq 1 \right\}$$

$$= \left\{ (-1)^{n+1}\left(\frac{n}{5^{n-2}}\right) : n \geq 3 \right\}$$

Gráficamente:

Forma en la recta:

$$a_n = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \geq 1 \right\} = \left\{ \overset{a_1}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}}, \overset{a_2}{\overset{\shortparallel}{\frac{2}{3}}}, \overset{a_3}{\overset{\shortparallel}{\frac{3}{4}}}, \overset{a_4}{\overset{\shortparallel}{\frac{4}{5}}}, \ldots \right\}$$



Forma en el plano:

$$a_n = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$

Podemos ver que cuando n es muy grande a_n es muy cercano a 0.

Esto sugiere la noción de límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Si los términos de a_n son muy cercanos a L cuando n es muy grande.

Ej: • $a_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

• $a_n = \frac{n}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

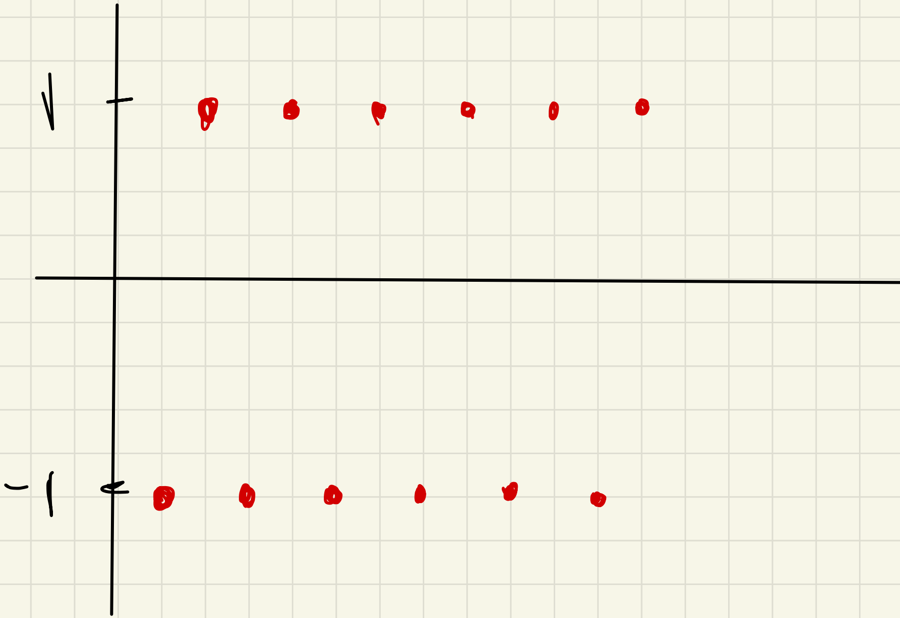
Gráficamante:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ← es un número finito, decimos que a_n converge. Si esto no pasa, decimos que diverge.

Ej: $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = $??

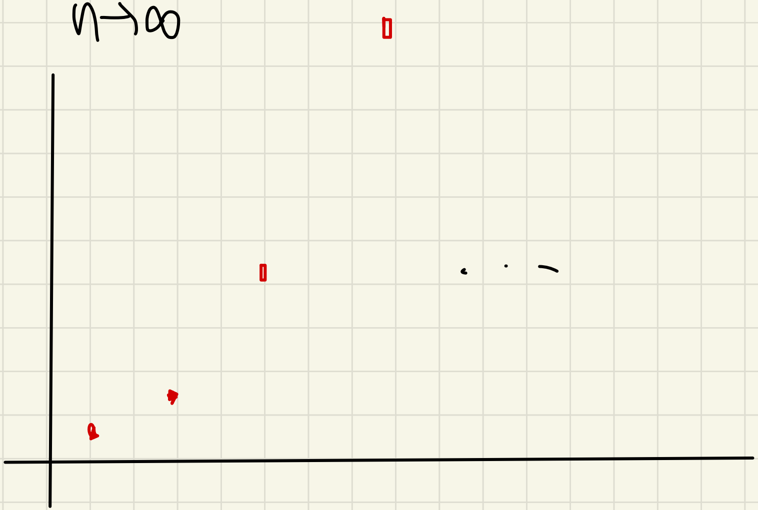
Preg: se acercan todos a una linea.



No, no se quedan cerca de nadie.

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe, o $(-1)^n$ diverge.

Ej: $\lim_{n\to\infty} 3^n = ??$



Preg: Se acercan a una linea??

No, se hacen cada vez màs grandes

$\lim_{n\to\infty} 3^n$ no existe.

Obs: tomamos el número 100.000

Sabemos que a partir de un punto todos los términos de la suc. son mayores que 100.000.

$$3^{10} = 59.049$$

$$3^{11} = 177.147 > 100.000$$

$$3^{12} > 3^{11}$$

$$3^{13} > 3^{12} > 3^{11} > 100.000$$

A partir de 3^{11}, todos los términos son mayores que 100.000.

100.000.000 ??

$3^{20} > 3.000.000.000$

Para cualquier número M, por muy grande que sea, la suc siempre lo pasa y se queda sobre ese número.

lo que ocurre aquí es que a_n "se nos va",

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$$

Propiedades de los límites:

Asumiendo que todos los límites en cuestión existen, uno tiene que:

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$$

$a_n = n$, $b_n = n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} b_n$

$a_n - b_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$$

$$\overset{?}{=} \infty - \infty ??$$

$$\lim a_n \cdot b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}, \quad \lim b_n \neq 0$$

$$\lim a_n^p = (\lim a_n)^p \qquad p > 0, \quad a_n > 0$$

Ej: calcular $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

Sol: sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 0^2 = 0$$

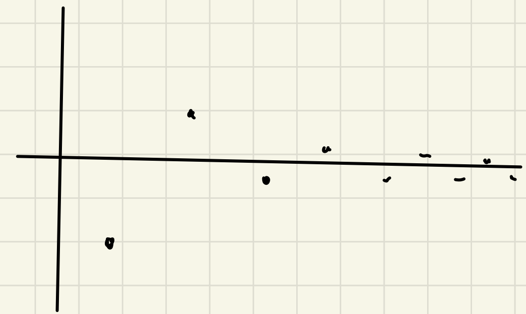
Prop: Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ antonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ojo: no es cierto si el límite no es 0:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 3 \not\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

Ej: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$



$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{n}$$

$$= \frac{1}{n}$$

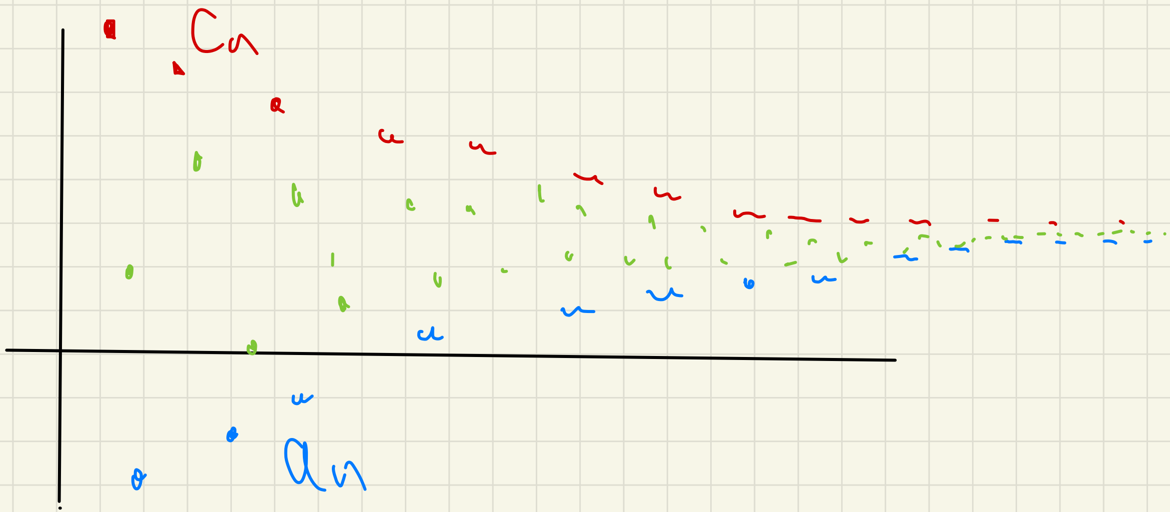
$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Por la propiedad que vimos arriba, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Prop: Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$



Ej: $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$\lim_{n\to\infty} a_n$??

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \ldots n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \ldots n}\right)$$