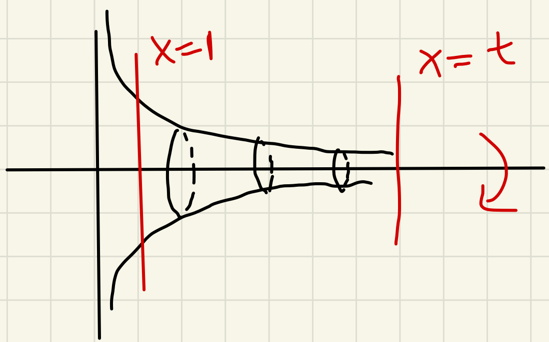
Clase 25: impropias

Ej: considere la curva $y = \frac{1}{x}$ con $x \geq 1$. Muestre que el volumen de la sup generada al rotar esta curva en torno al eje x es finito



$x = 1$ y "$x = \infty$"

$\Updownarrow$

vol cuando $t \to \infty$

La integral que nos da el volumen

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \int_1^\infty \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \int_1^\infty \pi \frac{1}{x^2} dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

Ya vimos que esta integral existe (lo vimos para $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$, existen si $p>1$).

Por lo tanto el volumen es finito.

Por otro lado, el área de la superficie es

$$A = \int_a^b 2\pi \sqrt{1 + f'(x)^2}\, f(x)\, dx$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)^2 = \frac{1}{x^4}$$

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$$

$$\text{Área} = \int_1^\infty 2\pi \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

Sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ no existe

Recordemos el criterio de comparación:

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(x)\, dx = \infty$$

Queremos comparar $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot \frac{1}{x}$

y $f(x) = \frac{1}{x}$

Pregunta: es cierto que $0 \leq f \leq g$?

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq 1$$

$$\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x} \geq 0$$

La integral de ese no existe

Por lo tanto $\int_1^\infty 2\pi \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,\frac{1}{x}\,dx$ no existe, y luego el área es infinita.

El criterio de comparación es útil pero limitado; vamos a ver otros criterios.

Criterio comparación al límite / cociente

Si f y g son positivas en $[a,\infty)$ y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existe si y sólo si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ existe.

Si el limite es cero:

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ existe} \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ existe}$$

Si el límite es infinito:

$\int_a^\infty g(x)dx$ no existe $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ no existe

Ej: determine si $\int_1^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}\,dx$ existe o no.

Heurística: Si tenemos $\int_a^\infty \frac{pol_1}{pol_2}\,dx$, lo que nos importa es grado(pol_2) - grado(pol_1):

Si esto es mayor (estricto) que 1, entonces lo más probable es que la integral exista. De lo contrario, lo más probable es que la integral no exista.

Heurística 2: basado en lo anterior, comparar con

$$g(x) = \frac{1}{x^{gr(pol_2) - gr(pol_1)}}$$

En nuestro ejemplo: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2}{4x^4+25}\,dx$

$\text{grado}(\text{pol}_{\text{abajo}}) - \text{grado}(\text{pol}_{\text{arriba}}) = 4 - 2 = 2 > 1$

Heurística 1: tamos bien (prob. existe).

Heurística 2: compare con $\frac{1}{x^2}$

Criterio cociente: $f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25}$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4}{4x^4+25} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{4+\frac{25}{x^4}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4} \neq 0$, por el criterio del cociente

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}\,dx \iff \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ existe}$$

existe

Ej: lo mismo para $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$

Sol: $\sqrt{\text{algo}} = (\text{algo})^{1/2}$

la raiz está cortando el grado en 2:

$\sqrt{x^4+x^2+1}$ se comporta como algo de grado $4/2 = 2$

$$\int \frac{\text{grado } 1}{\text{"grado } 2\text{"}}\,dx$$

diferencia $= 2-1 = 1 \not> 1$

Estamos mal (prob no existe)

Comparamos con $g(x) = \frac{1}{x^{\text{diferencia}}} = \frac{1}{x}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}} \xrightarrow{x\to\infty} 1 \neq 0$$

Por criterio cociente: $\int f(x)\,dx$ existe si y

Solo si $\int g(x)\,dx$. Pero sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ no existe, así que

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx \quad \text{no existe.}$$

Decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge absolutamente si $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ existe.

Ejemplo:

$$\int_2^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx \qquad f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1}$$

$$|f(x)| = \frac{|\cos(x)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

$$\int_2^\infty g(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \text{existe}$$

$\left(\text{comparar con} \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \right)$

Su integral existe

$$|f(x)| \leq g(x)$$

$$\Downarrow$$

$\int_2^{\infty} |f(x)|\, dx$ existe por criterio de comparación. Entonces $\int_2^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, dx$

Converge absolutamente.

Cual es la gracia de esto?

Teo: Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge absolutamente

entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge en el sentido

usual.

$$\int_2^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx \quad \text{existe}$$

La otra ventaja: $|f|$ es positivo. Podemos ocupar todos los criterios que sabemos.

Ej: ancontrar los valores de a y b de modo que

$$\int_1^\infty \left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1\right) dx = 1$$

$$\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - \frac{x(2x+a)}{x(2x+a)}$$

$$= \frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)} = \frac{pol_1}{pol_2}$$

grado de arriba es 1 o 0

grado de abajo es 2

La diferencia es $\begin{cases} 2-1=1 & \times \\ 2-0=2 & \checkmark\checkmark \end{cases}$

Para que esa diferencia sea 2, debe ocurrir que $a = b$

Si este es el caso entonces el integrando es

$$\frac{a}{x(2x+a)} = \frac{a}{2x^2+xa}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{a}{x(2x+a)}\,dx$$

fracciones parciales

$$\frac{a}{x(2x+a)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+a}$$

$$\frac{a}{x(2x+a)} = \frac{A(2x+a) + Bx}{x(2x+a)}$$

$$= \frac{x(2A+B) + Aa}{x(2x+a)}$$

$A=1$, $2A+B=0 \Rightarrow B=-2$

$$\frac{a}{x(2x+a)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x+a)}$$

$$\int_1^\infty \frac{a}{x(2x+a)}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x+a)}\,dx$$

Estamos tentados a decir

$$= \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx - 2\int_1^\infty \frac{1}{2x+a}\,dx$$

$$\infty - \infty \qquad \qquad 0/0$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x+a)}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln|x| \Big|_1^t - \ln|2x+a| \Big|_1^t \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln(t) - \ln|2t+a| + \ln|2+a| \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln\left(\frac{t}{2t+a}\right) + \ln|2+a| \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{2+\frac{a}{t}}\right) + \ln|2+a|\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln|2+a| = 1 \qquad a>0$$

$$\ln(2+a) = 1 - \ln(1/2)$$

$$2+a = e^{1-\ln(1/2)}$$

$$a = e^{1-\ln(1/2)} - 2 = 2e-2$$

$$b = 2e-2$$

$$e^{1-\ln(1/2)} = e^1 \cdot e^{-\ln(\frac{1}{2})}$$

$$= e \cdot e^{\ln(2)} = e \cdot 2$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$