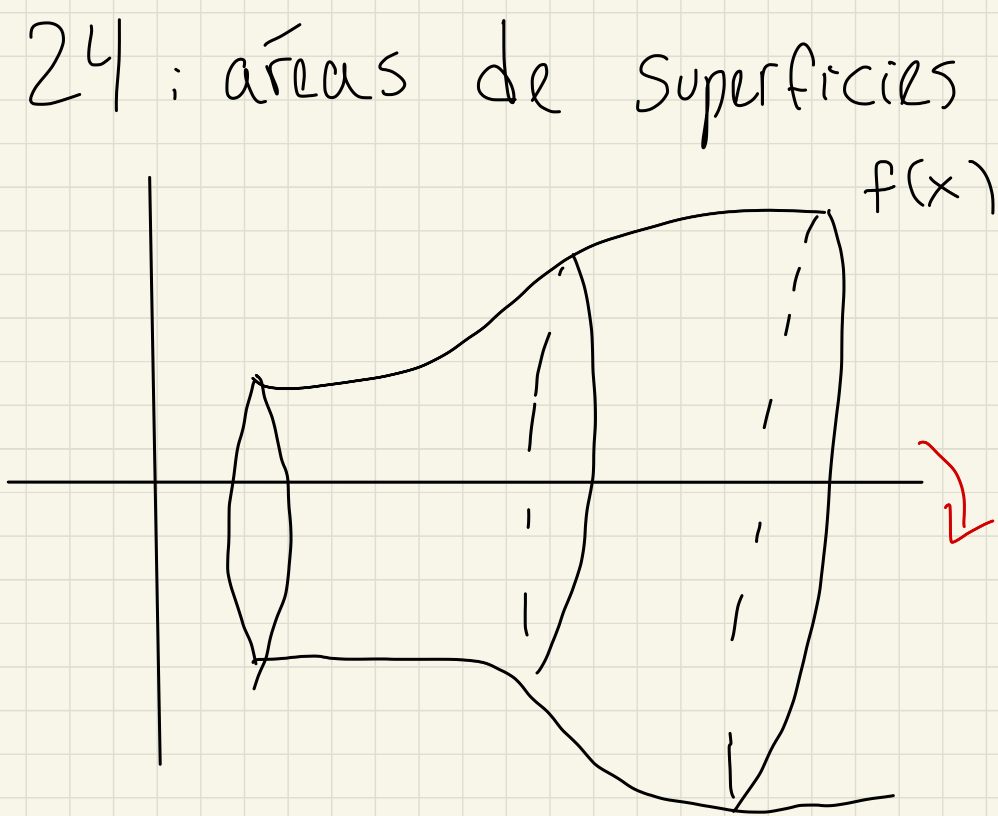
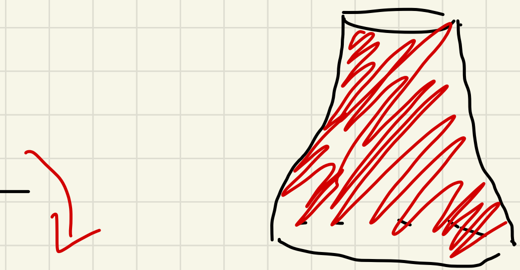
Clase 24: áreas de superficies de revolución:

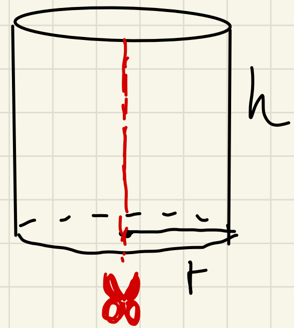




Pregunta: cuál es el área de esta figura.

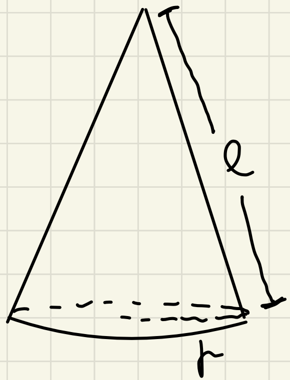
Para responder esto, aproximamos:

Primero:

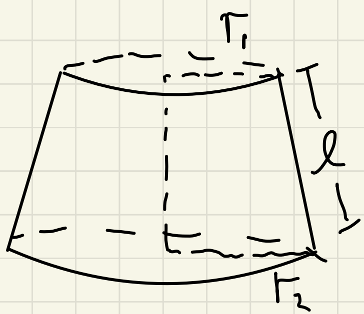


Área de la sup. del cil:

$$\text{Área} = 2\pi r h$$

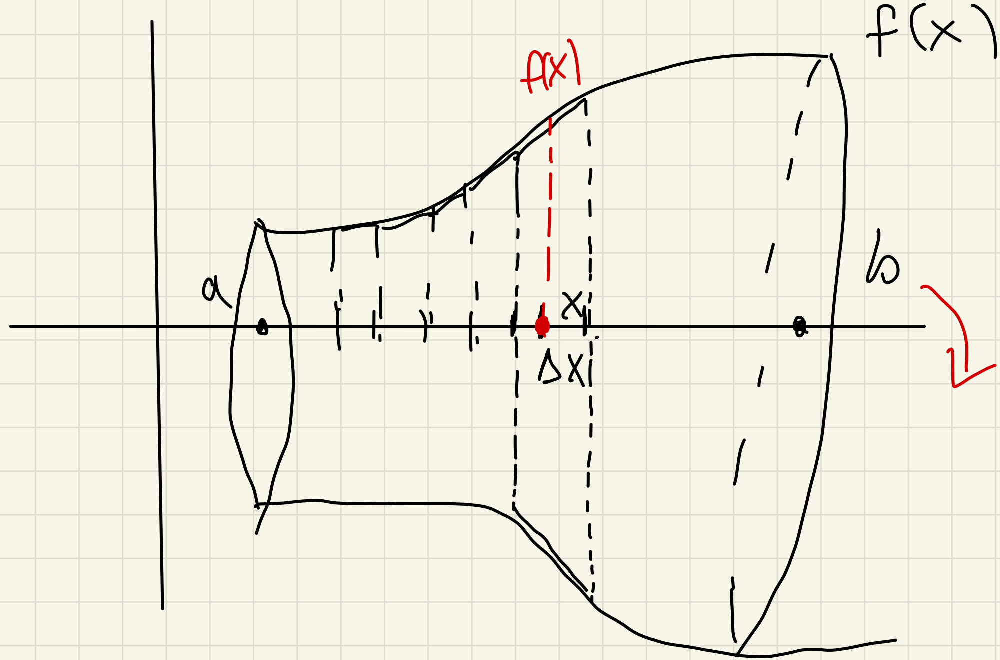


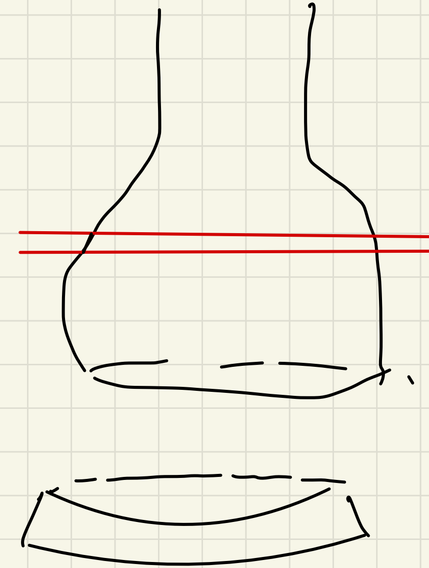
Área del manto del cono $= \pi r l$



Area del cono truncado $= 2\pi l \left(\dfrac{r_1 + r_2}{2} \right)$

Por qué vimos todo esto?





Área de ese cono $\approx 2\pi\left(\overbrace{\sqrt{1+f'(x)^2}\,\Delta x}^{\ell}\right)\left(\overbrace{f(x)}^{\frac{r_1+r_2}{2}}\right)$

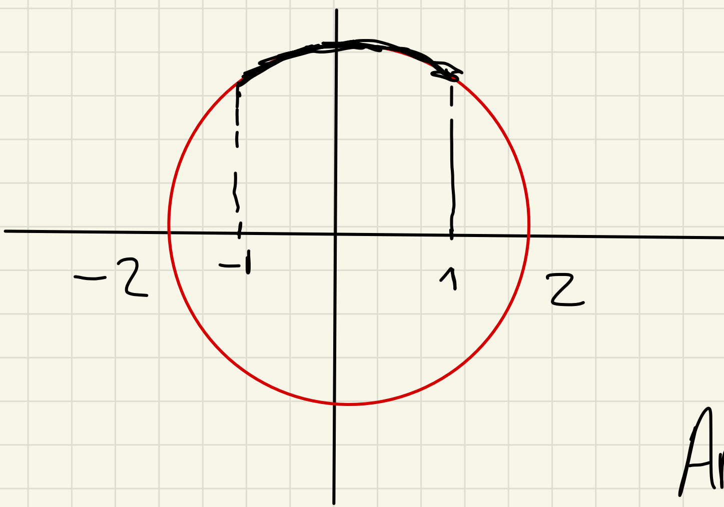
por el mismo
cálculo que
con largo de curva

Suma todos los conos al dividir toda la figura $\approx \sum 2\pi\sqrt{1+f'(x)^2}\, f(x)\,\Delta x$

$\downarrow$ división más y más fina

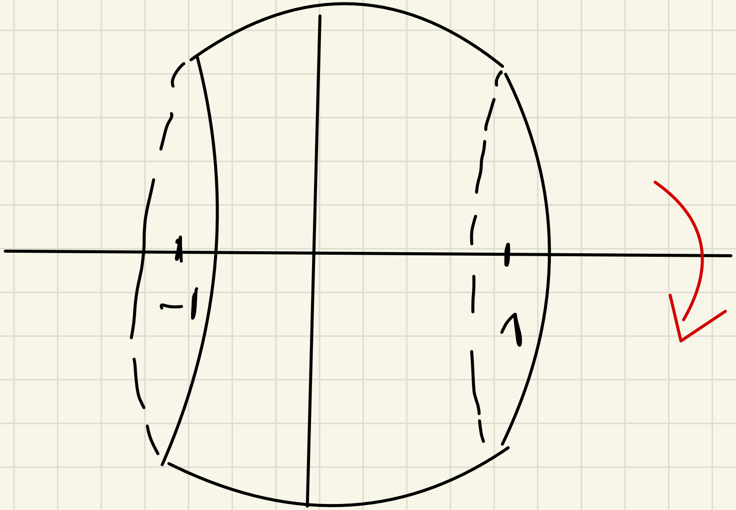
$$\text{Área Sup} = \int_a^b 2\pi\sqrt{1+f'(x)^2}\, f(x)\, dx$$

Ej: considera la sup. obtenida al rotar la función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, x entre -1 y 1. Calcule el área de esa sup. Cómo se interpreta esa sup? que pasa si x va entre -2 y 2?



$$y = \sqrt{4-x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$\text{Area} = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, f(x) \cdot 2\pi \, dx$$



$$f(x) = \sqrt{4-x^2} = (4-x^2)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2} \cdot -2x$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)^2 = \frac{x^2}{4-x^2}, \quad 1+f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{4-x^2}$$

$$= \frac{4-x^2+x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

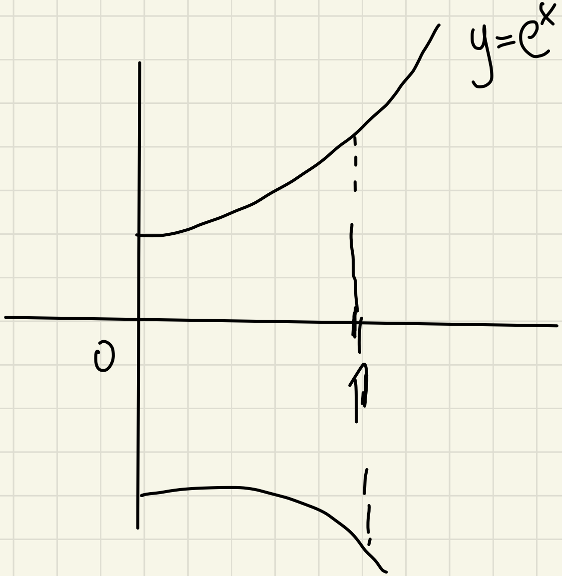
$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} = \cancel{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{4-x^2}}} = 2$$

$$\text{Area} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} 2\pi \cdot 2\,dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\,dx = 4\pi \cdot 2 = 8\pi$$

Ej 2: Calcule el área de la sup. generada al rotar la curva $y = e^x$, $0 \le x \le 1$ en torno al eje X:



$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(x)^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$$1 + f'(x)^2 = 1 + e^{2x}$$

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + e^{2x}}$$

$$f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} = e^x \sqrt{1 + e^{2x}}$$

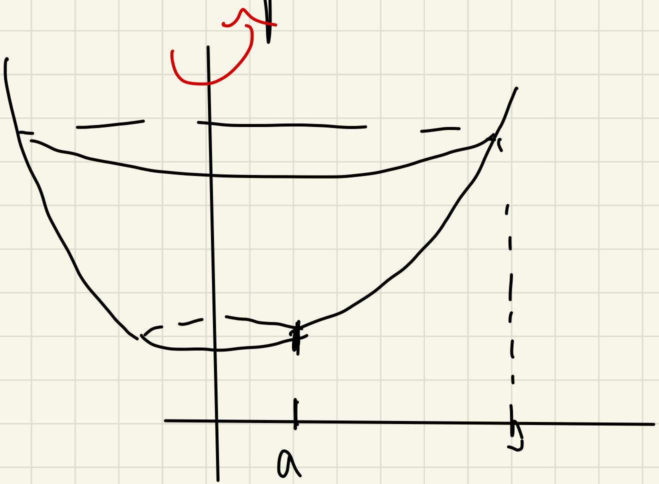
$$\text{Área} = \int_0^1 2\pi e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$u = e^x \qquad du = e^x\, dx$$

$$= \int_1^e 2\pi \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad u = \tan s$$

$$= \pi \left(e\sqrt{1+e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1+e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right) \right)$$

¿Qué pasa si rotamos en torno al eje y?



$$\text{Área Sup} = \int_{f(a)}^{f(b)} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Ej: calcule el área de la sup generada al rotar $y = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 2$, en torno al eje y.

Sol: • Obs: nos dan la función de la forma $y = f(x)$ (no $x = g(y)$)

$$\Downarrow$$

$$\text{Area} = \int_a^b 2\pi X \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$y = x^2$$

$a = 1$, $b = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\text{Area} = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

Sol alternativa: pensemos en x como función de y: $x = \sqrt{y}$ y entre 1 y 4

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\text{Area} = \int_1^4 2\pi \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy$$

$$= \pi \int_1^4 \sqrt{4y+1}\, dy = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

$$y = x^5 + x^4 + 7x^2 + 3$$

$$x = g(y) \quad ??$$

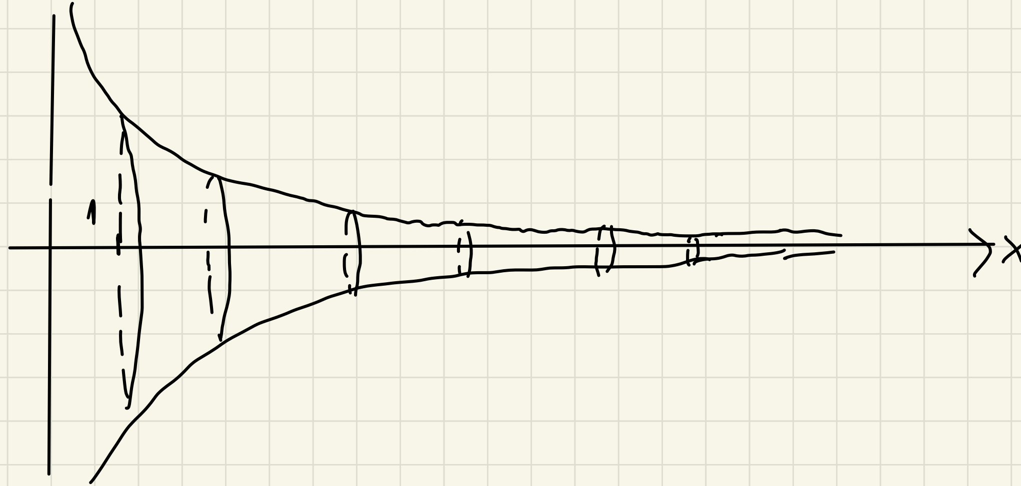
Ej: calcule el área de la sup obtenida al rotar $y = \cos(2x)$, $0 \leq x \leq \pi/6$, en torno al eje x

$$f(x) = \cos(2x)$$
$$f'(x) = -2\,\text{sen}(2x)$$
$$f'(x)^2 = 4\,\text{sen}^2(2x)$$
$$1 + f'(x)^2 = 1 + 4\,\text{sen}^2(2x)$$

$$\text{Area} = \int_0^{\pi/6} 2\pi \cos(2x)\sqrt{1+4\,\text{sen}^2(2x)}\,dx$$

$$\approx 3.75\ldots$$

Ej: considere la curva $y = \frac{1}{x}$ con $x \geq 1$. Muestre que el volumen de la sup generada al rotar esta curva en torno al eje x es finito.



Segunda parte: Muestre que el área de esta sup. es infinita.

$$\text{Vol} = \int_1^{\infty} \pi (f(x))^2 \, dx \qquad \text{Area} = \int_1^{\infty} 2\pi x \sqrt{1+f'(x)^2} \, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Cuerno de Gabriel / Trompeta de Gabriel