Clase 21: integrales impropias

- Integrales de funciones sobres intervalos infinitos (Tipo 1)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \quad , \quad \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x+3}\,dx$$

- Integrales de funciones con discontinuidades (Tipo 2)

$$\int_{0}^{1} \ln x\,dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \quad , \quad \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Las integrales impropias no siempre existen!!

Queremos saber cuándo existen y cuándo no.
A veces el cálculo del valor de la integral no es tan importante.

A veces una integral puede ser de los dos tipos:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

ambos tipos

→ $\int_0^\infty \cdots dx$, intervalo infinito (tipo 2)

→ $\frac{1}{x^2}$ no es continua en $x=0$ (tipo 2)

Qué hacemos?? Separamos la integral en dos int. de modo que c/u de las nuevas sea sólo de uno de los tipos:

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx}_{I_1:\ \text{tipo } 2} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}_{I_2:\ \text{tipo } 1}$$

Y las podemos tratar por separado

$$I_1 = \lim_{t \to 0} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{t \to 0} \int_t^1 x^{-2} dx$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_t^1$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_t^1 \right) = \lim_{t \to 0} \left(-1 + \frac{1}{t} \right) = -1 + \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}}_{\to \infty}$$

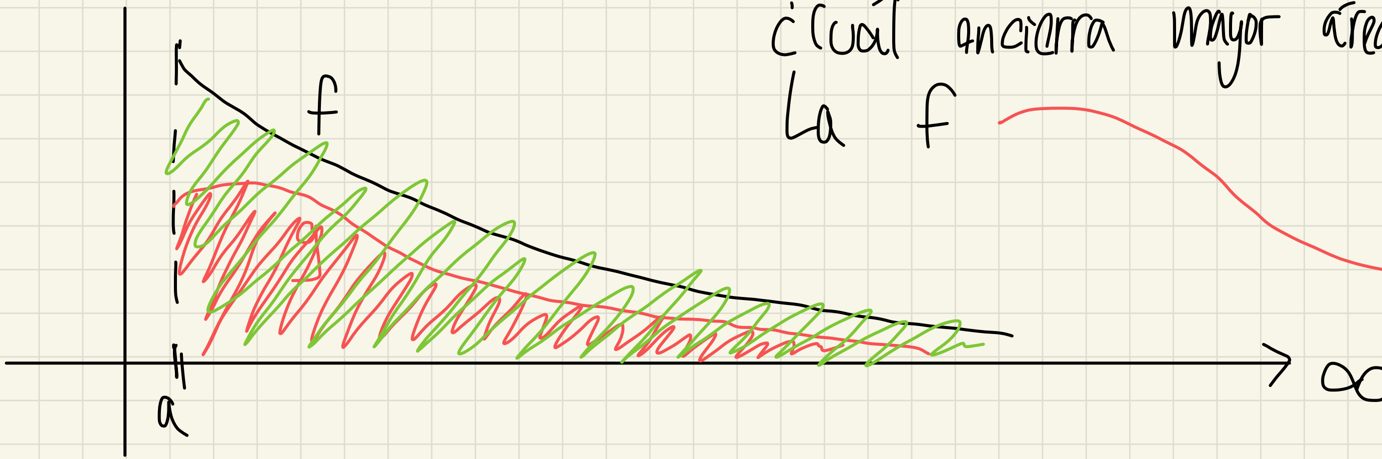
$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ no existe (dio ∞)

Por lo tanto, $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ no existe (indep de lo que pase con $I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$)

Cómo saber si una integral existe, sin calcularla?

Pensemos en integrales de tipo 1, y por ahora, funciones positivas.

Si sabemos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existe



¿Cuál encierra mayor área?
La f

y estamos interesados en saber si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ existe.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \geq \int_a^\infty g(x)\,dx \geq 0$$

Esto existe, es un número, digamos M

$$\Rightarrow \qquad M \geq \int_a^\infty g(x)\,dx \geq 0$$

Puede ser $\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty$?? No, si pasara tendríamos

$$M \geq \infty \geq 0$$

es un número!!

Por lo tanto, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ existe.

Esto es el criterio de comparación

de integrales.

Se puede leer de otra forma:

$$\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{En resumen: si } f(x) \geq g(x) \geq 0 \\ \displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx < \infty \\ \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx = \infty \end{array}}$$

Ejemplo de cómo usar esto:

Ej: decida si $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ existe o no.

Sol: tenemos que $f(x) = e^{-x^2}$, queremos una $g(x)$ tal que

$$f(x) \leq g(x)$$

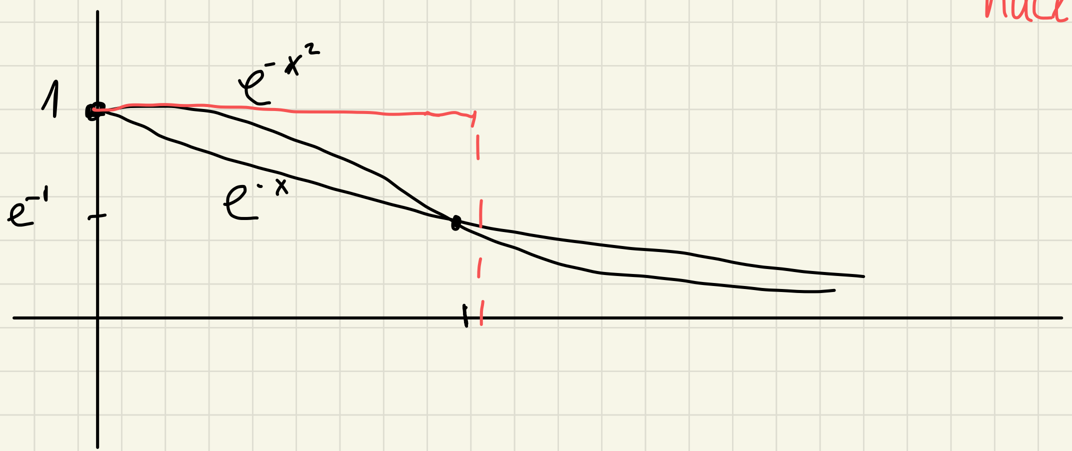
$$g(x) \leq f(x)$$

y tal que podamos decidir fácilmente si $\int_0^\infty g(x)\,dx$ existe o no

Vamos a buscar $g(x) \geq f(x)$ tal que $\int_0^{\infty} g(x)\,dx < \infty$

$\int e^{-x^2}dx$ no la sabemos hacer, $\int e^{-x}dx$ si la sabemos hacer

La función e^{-x^2}



Obs: • e^{-x^2} es más grande que e^{-x} por un rato, luego es más chica

- Las curvas se cortan en $x=1$
- Luego de $x=1$, e^{-x} es más grande

Ojo: no es cierto que $e^{-x} \geq e^{-x^2}$ para todo $x \in [0, \infty)$

lo que sí es cierto es que $e^{-x} \geq e^{-x^2}$ para todo $x \in [1, \infty)$

$$\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x}\,dx \geq \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}\,dx$$

$$\parallel$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-1}-e^{-t}\right)$$

$$\parallel$$

$$e^{-1} \geq \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx \geq 0$$

Qué pasa con $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$?? esta integral no es impropia, existe, no tiene motivos para no existir

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} e^{-x^2}\,dx}_{\text{existe}} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\text{existe}}$$

Recapitulemos lo que hicimos:

- $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, creemos que existe
- Encontramos una $g(x) \geq f(x) = e^{-x^2}$ pero no en todo $[0,\infty)$, sólo en $[1,\infty)$
- Dividimos $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

existe pq no
es impropia

La comparamos con $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1}$

$$0 \leq \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1}$$

$\Uparrow$

existe

- $$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

ambas existen $\Rightarrow$ la original existe.

Esto plan de acción es muy común

Ej: decida si $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}$ existe o no.

Sol: $f(x) = \frac{1+e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}$

$$\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}dx}_{\text{no existe}} \quad , \quad \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx}_{\text{existe}} \quad \text{existen?}$$

idea

Una solución precisa: $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x} = g(x) \quad \text{para todo}$$

≥ 0

$x \in [1, \infty)$. Además $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$, por lo tanto $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x} dx = \infty$, no existe.

$$\int f(x)dx \geq \text{algo} = \infty \Rightarrow \int f(x)dx = \infty$$

La idea es comparar con una función más simple, que yo se integrar

Ej: decida qué tipo de integral impropia es c/u de las siguientes:

a) $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4} dx$ tipo: 1

b) $\int_0^{\pi/2} \sec(x)\, dx$ tipo: 2, $\sec(x)$ no está definida en $x = \pi/2$

c) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+5} dx$ tipo 1.

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ tipo: 1 y 2

$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ no está denida ni en 1 ni en -1.

Ej: evalue las sgtes integrales (si es que existen).

a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} \, dx$$

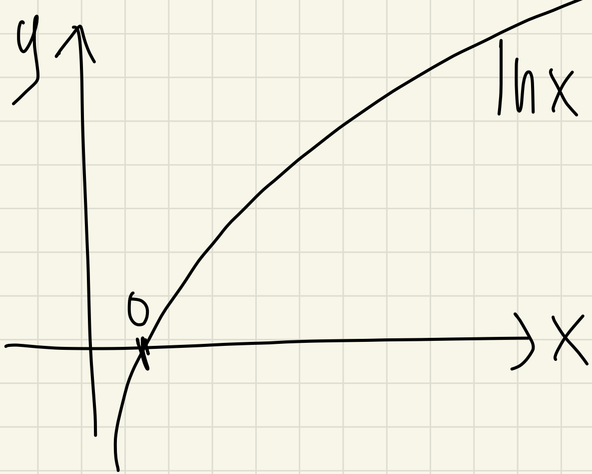
$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u \, du$$

$$= \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$



$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx \quad \text{no existe.}$$

b) $$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\, dx$$

Sol: $x^6 = (x^3)^2$

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$$

$1+x^3 = u$

$3x^2 dx = du$

$x^2 dx = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx$$

$$u = x^3$$
$$du = 3x^2\,dx$$
$$\frac{du}{3} = x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\arctan(u)$$

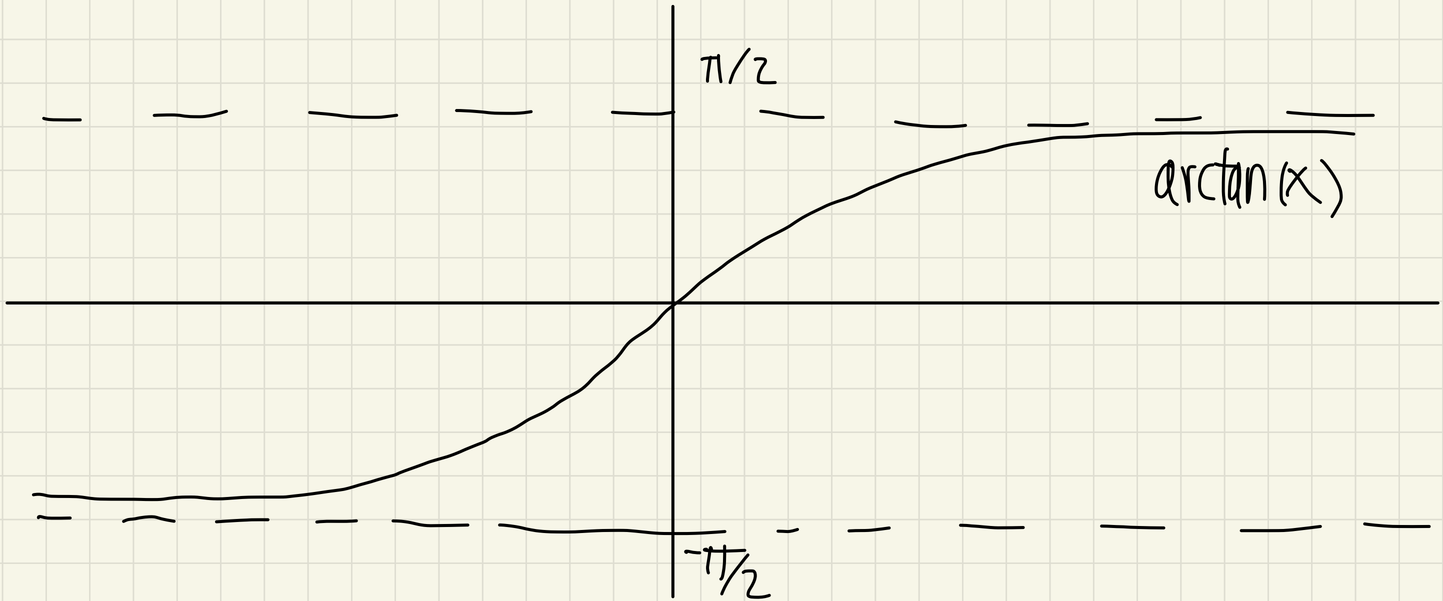
$$= \frac{1}{3}\arctan(x^3)$$

Desafío: hacerlo por comparación, o hacer

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^7}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{3}\arctan(x^3)\right)\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{3} \arctan(t^3) \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$$



La integral existe.