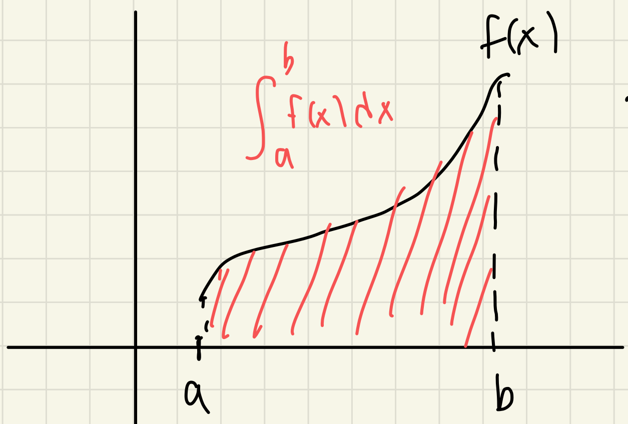
Clase 20: Integrales impropias

Hablamos ya de integrales de la forma $\int_{-\infty}^{a}$, $\int_{a}^{\infty}$, $\int_{-\infty}^{\infty}$ (tipo 1)

Hoy vamos a hablar de integrales de funciones con otro problema: discontinuidades



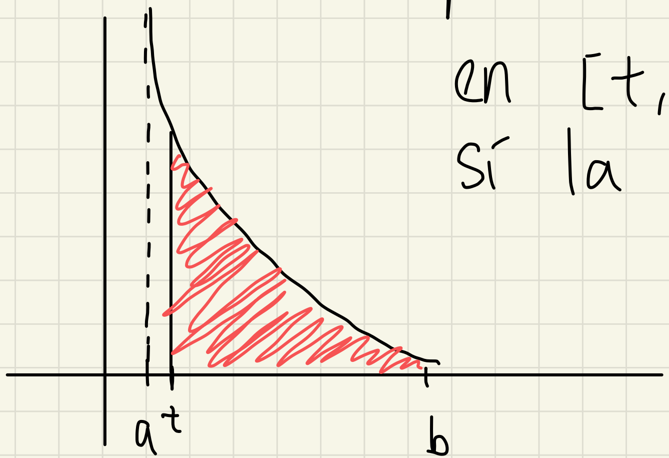
f cont

$\rightsquigarrow$

f no es cont en a

$A < \infty$??

Cómo abordar este problema?? $t > a$



en $[t, b]$, f sí es continua,
sí la podamos integrar

$$A(t) = \int_t^b f(x)\,dx$$

Queremos estudiar el comportamiento de $A(t)$ cuando $t \to a$. Si

$$\lim_{t \to a^+} A(t) = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

existe, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Si el límite $\lim_{t\to a^+} A(t)$ no existe, decimos que $\int_a^b f(x)\,dx$ no existe.

Si f tiene una discontinuidad en b, la int. impropia se define analogamente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Ej: $\int_{2}^{5} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Notamos que:

- $f(2)$ no está definido $\left(f(2) = \frac{1}{\sqrt{2-2}} = \frac{1}{0} \right)$

- $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$

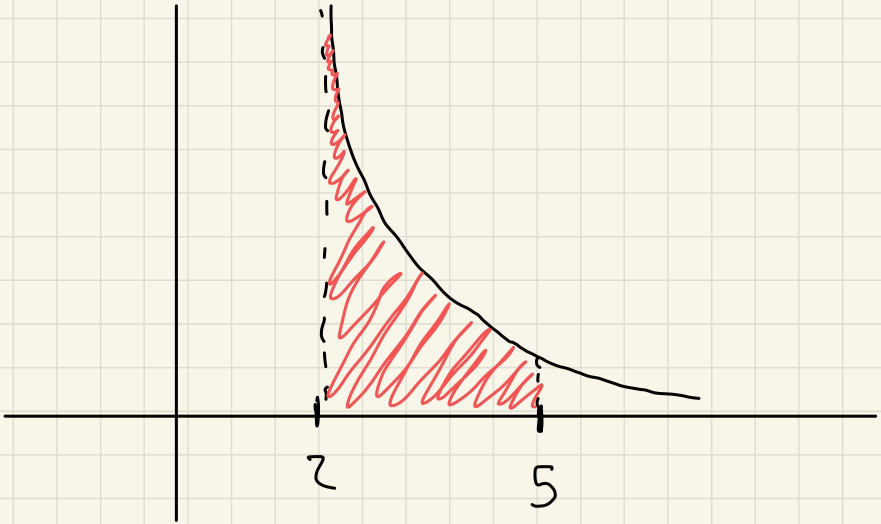
$f(2.01) = \frac{1}{\sqrt{0.01}}$ muy grande

$f(2.00001) = \frac{1}{\sqrt{0.00001}}$ aún más grande

⋮

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty .$$

$t > 2$

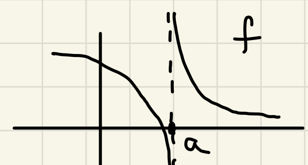


$$\int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$= 2\sqrt{x-2}\,\Big|_t^5$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right)$$

Luego uno tiene que calcular el límite.



$$\lim_{x\to a} f(x)$$

$$A(t) = \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2})$$

$$\lim_{t \to 2^+} \sqrt{t-2} = 0$$

$$\lim_{t \to 2^+} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \int \frac{dx}{(x-2)^{1/2}} = \int (x-2)^{-1/2}\,dx$$

$u = x - 2$

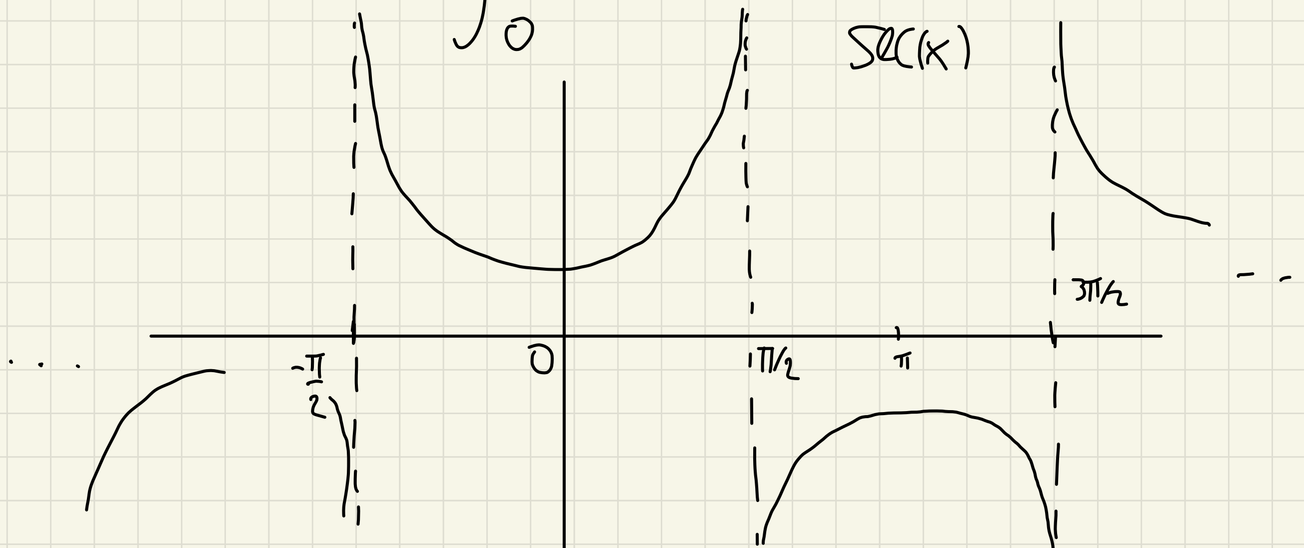
$du = dx$

$$= \int u^{-1/2}\,du$$

$$\int u^{-1/2}\,du = \frac{u^{1-1/2}}{1-1/2} = \frac{u^{1/2}}{1/2} = 2u^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{u} = 2\sqrt{x-2}$$

Ej: determine si $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$ existe o no.



Obs: • $\sec(\pi/2)$ no existe
• $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} \sec(x) = \infty$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sec(x)\,dx$ es impropia

Tomamos $t < \pi/2$

$$\int_0^t \sec(x)\,dx = \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^t$$

$$= \ln|\underbrace{\sec t}_{>0} + \underbrace{\tan t}_{>0}| - \underbrace{\ln|\underbrace{\sec(0)}_{=1} + \underbrace{\tan(0)}_{=0}|}_{=0}$$

$t \in [0, \pi/2]$

$\ln 1 = 0$

$$\int_0^t \sec(x)\,dx = \ln(\sec t + \tan t)$$

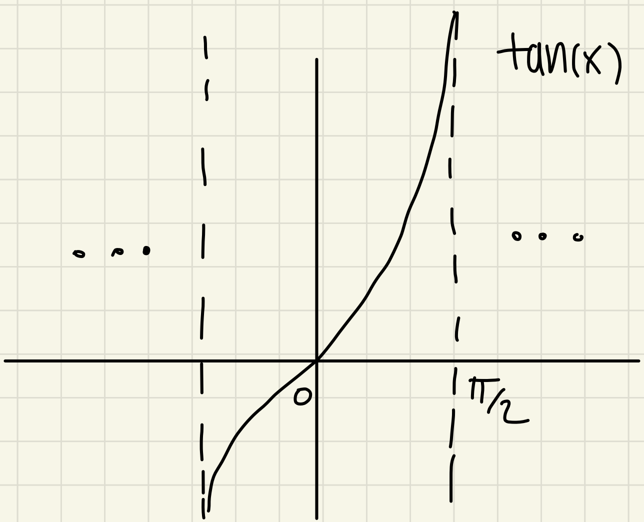
El valor abs se fue pq todo es positivo

Ahora hay que ver

$$\lim_{t\to\pi/2^-} \int_0^t \sec(x)\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\sec t + \tan t) = \infty$$

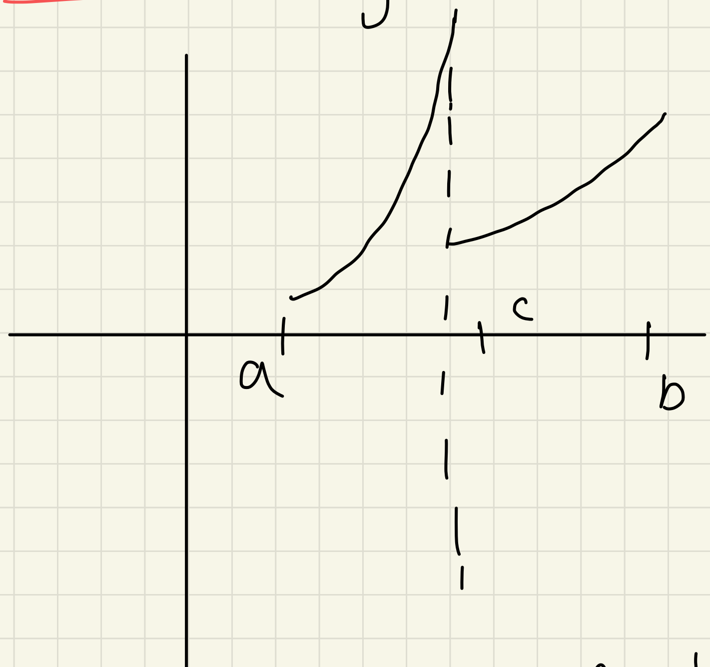
$\sec t \to \infty$ si $t \to \frac{\pi}{2}^-$

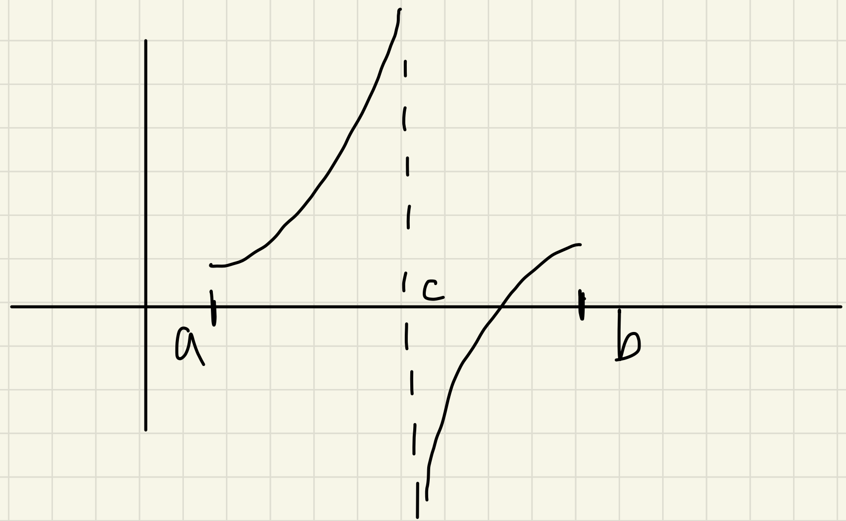
$\tan t \to \infty$ si $t \to \frac{\pi}{2}^-$



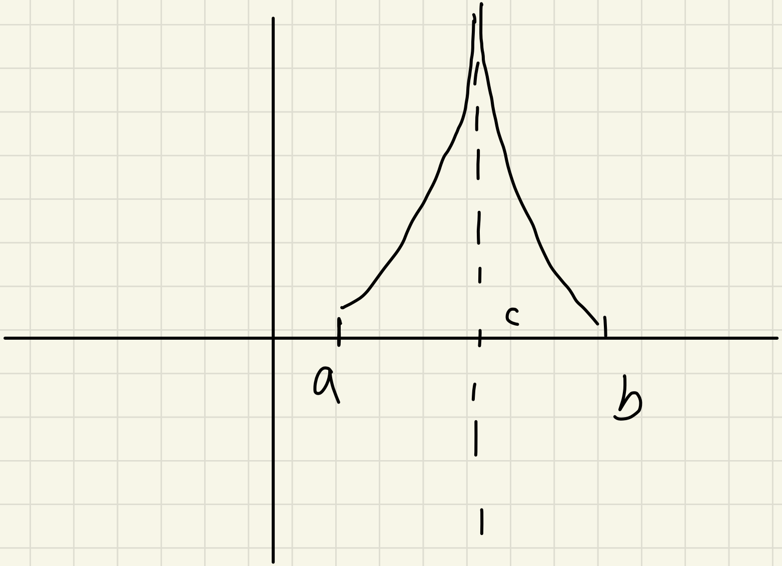
$$\int_0^{\pi/2} \sec(x)\,dx$$ no existe

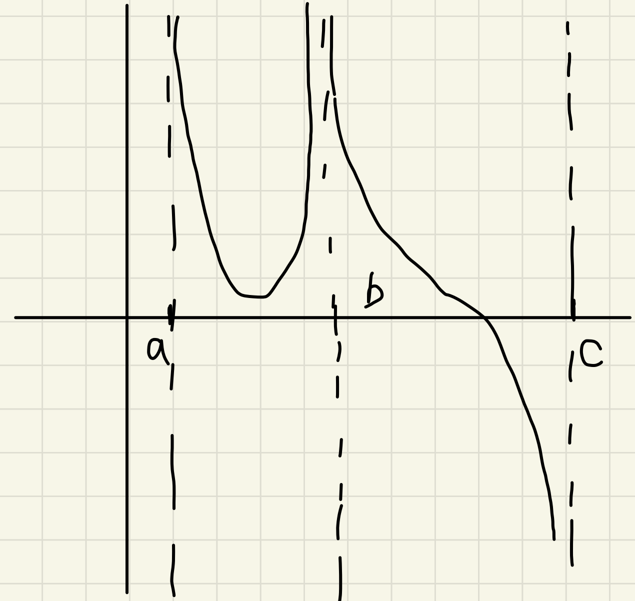
Hay casos donde la función tiene una disc. entre a y b





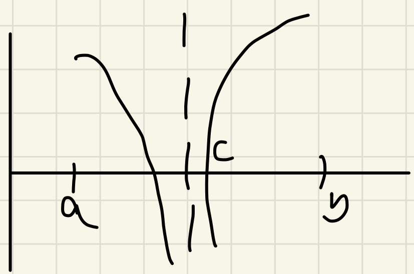
posibles casos





Nos centramos en un caso donde solo hay una discontinuidad en $c \in (a, b)$

peor caso: lo dejamos afuera por ahora



En ese caso, uno quiere definir

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Sólo que hay un problema entre el a y el b.

lo que uno hace es mirar

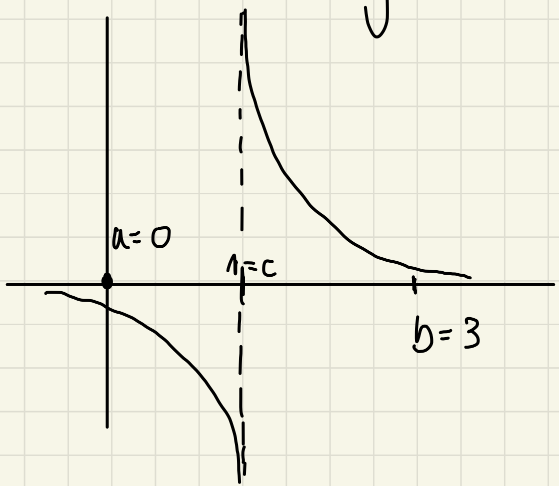
$$\int_a^c f(x)\,dx \quad y \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

Si ambas existen, definimos $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$

ojo: ambas integrales son posiblemente impropias

Ej: determine si $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ existe o no.

Sol: la función se grafica como



hay una discontinuidad en $c=1$, por lo tanto queremos estudiar

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx \text{ y } \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

Empecemos con $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$:

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx \qquad u = x-1 \qquad du = dx$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|x-1|$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \underbrace{\Big(\ln|t-1| - \ln\underbrace{|0-1|}_{=1}\Big)}_{=0}$$

nos acercamos a 1 desde abajo $\Rightarrow$ $t<1$

$t-1<0$

$\Rightarrow |t-1| = 1-t$

$$= \lim_{t \to 1^-} \ln(1-t)$$

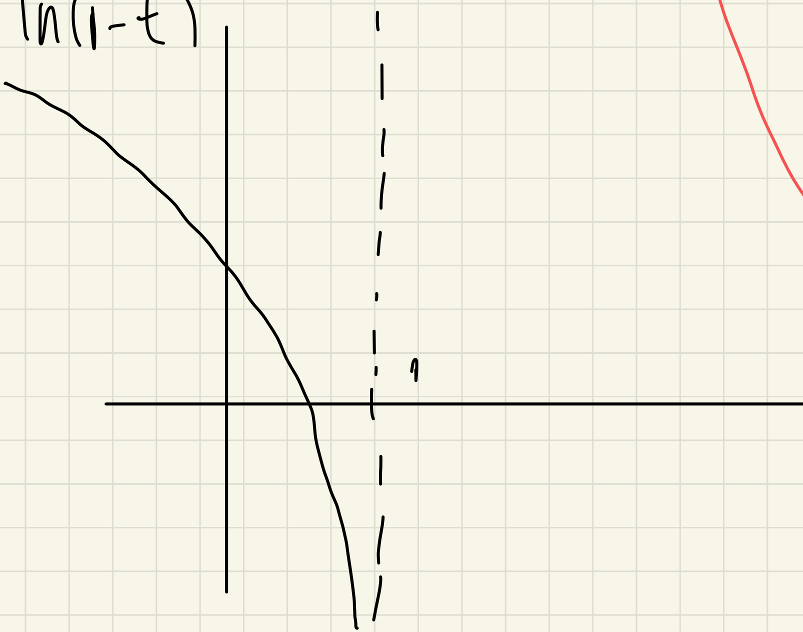
$$= -\infty = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$$

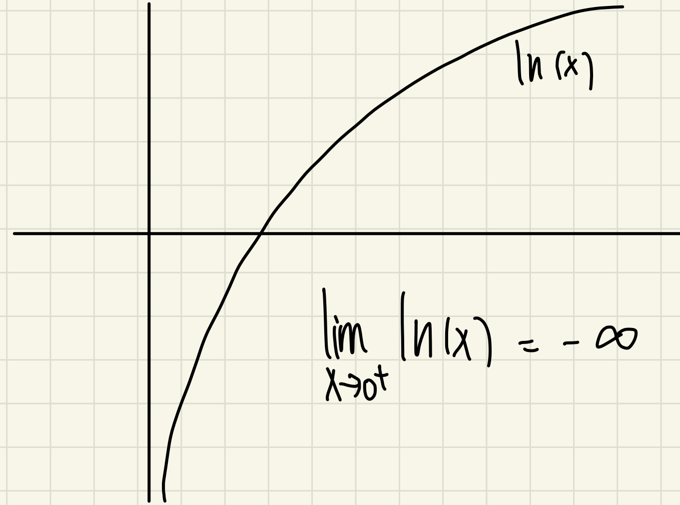
no existe

$$\Downarrow$$

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx \quad \text{no existe}$$

$\ln(1-t)$



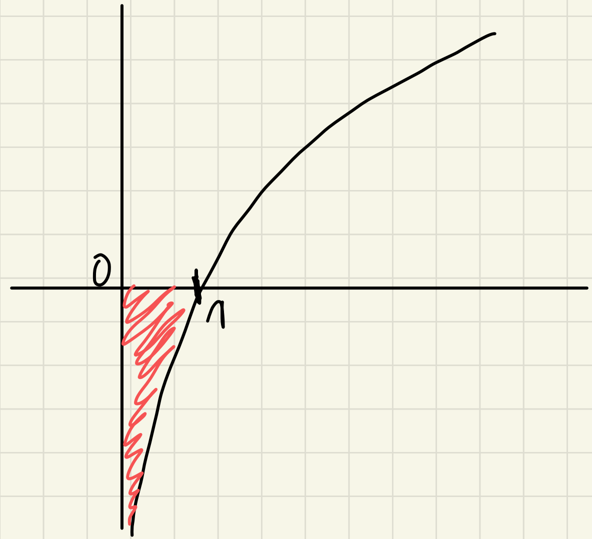


$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Ej: $\int_0^1 \ln(x)\,dx$

Obs: • $f(x) = \ln(x)$ tiene una disct en 0

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$



$\int_0^1 f(x)\,dx$ es impropia. Queremos

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln(x)\,dx$$

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot 1\,dx = x\ln x - x$$

$$\int_t^1 \ln(x)\,dx = x\ln x - x\Big|_t^1 = (\underbrace{1\cdot\ln 1 -}_{=0} 1) - (t\ln t - t)$$

$$= t - t\ln t - 1$$

Luego, queremos ver

$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln(x)\,dx = \lim_{t\to 0^+}(t - t\ln t - 1)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} t - \lim_{t\to 0^+} t\ln t - \lim_{t\to 0^+} 1$$

$= 0$ $\qquad$ $= ?!$ $\qquad$ $= 1$

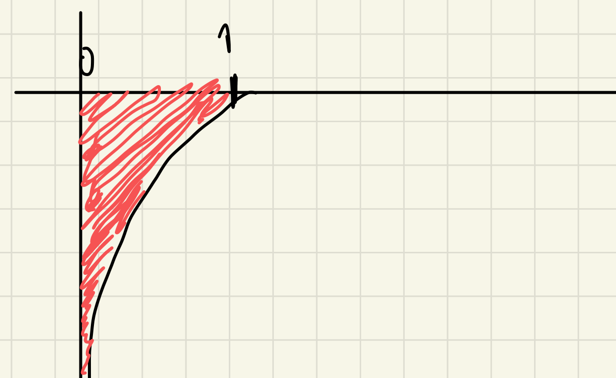
$= 0$

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

L'Hopital ✓

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = -\lim_{t\to 0} t = 0$$

Luego $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1$



Lo que viene:

Obs: Sacar el valor exacto de una int. impropia en gral es difícil.

Lo que uno quiere saber es si la integral existe o no.

Motivación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underset{\text{de } Q}{\text{razón de cambio}} \, dt = Q(t_2) - Q(t_1)$$

Q = energía que una máquina consume

$\frac{dQ}{dt}$ = razón de cambio

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dQ}{dt}\, dt = Q(t_2) - Q(t_1)$$

$\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{dQ}{dt} \right| dt$ = energía total usada entre t_1 y t_2

Si miramos procesos sobre escalas de tiempo muy grandes, podemos pensar que "$t_2 = \infty$"

$$\int_{t_1}^{\infty} \left| \frac{dQ}{dt} \right| dt = \text{energía usada entre } t_1 \text{ e "}\infty\text{"}$$

A uno le interesa saber si esta energía fue finita o no.

$$\int_R^{\infty} \text{---} \ldots dt$$