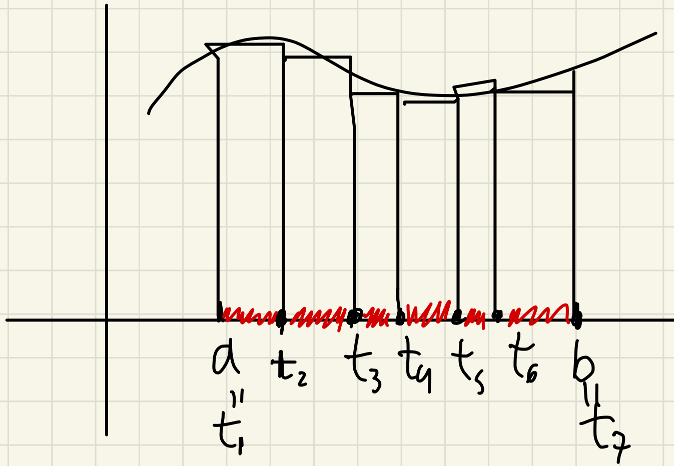
Clase 2:

Recordemos cómo aproximar áreas:



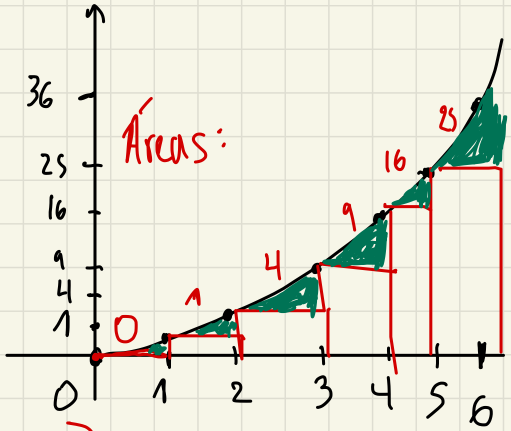
$$\text{Area bajo } f \approx \sum \text{anchos} \cdot \text{Altura}$$

$$\text{Ancho} = t_{i+1} - t_i$$

$$\text{Altura} = f(\text{algo})$$

$$\text{algo} \in [t_i, t_{i+1}]$$

Ejemplo: $f:[0,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$



ya tenemos una partición de $[0,6]$

Área real ≥ 55

Dos opciones obvias para el alto de los rectángulos:

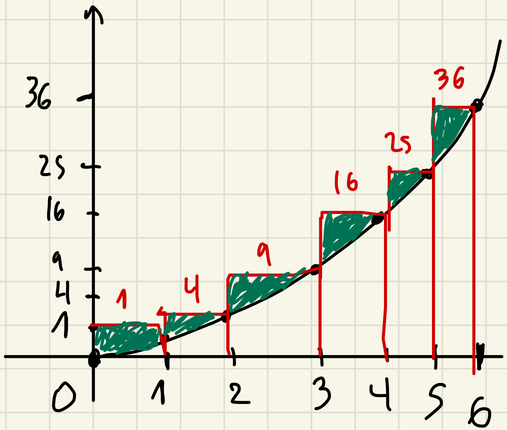
1. Extremo izq:

Aproximación s

$0+1+4+9+16+25=$

55

2. Extremo derecho



Área aproximada es

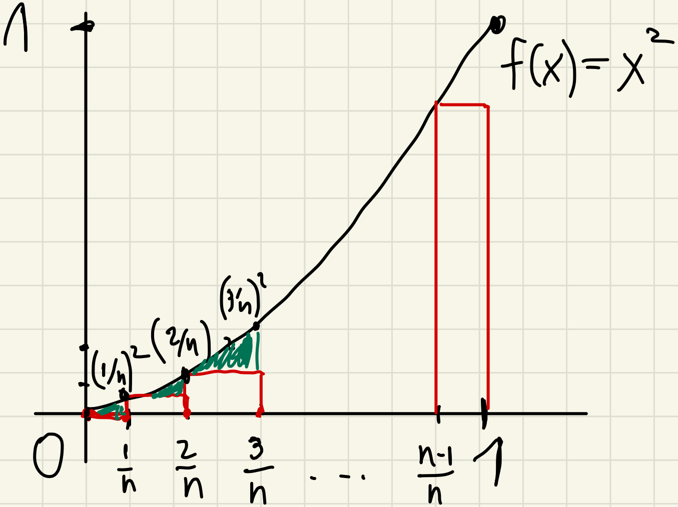
$1+4+9+16+25+36 = 91$

$55 \leq \text{Área} \leq 91$

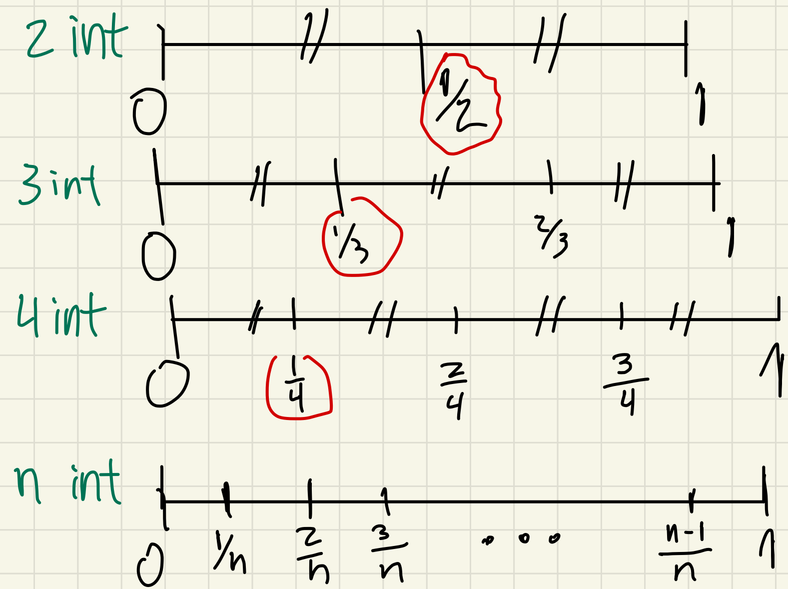
Las aproximaciones no son buenas, porque el ancho de los □'s es muy grande.

La idea es mirar □'s más finos

Consideremos muchos $\square$'s: n



Dividimos $[0,1]$ en n subintervalos del mismo largo:



Ancho de los intervalos:

$$1/n$$

Altura: tomar f evaluada en el extremo izq o el derecho.

k es cualquier número entre 1 y n

• Izq: los intervalos son

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\left[\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right],\dots,\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\dots\left[\frac{n-1}{n},1\right]$$

Extremos izq son: $0 \quad 1/n \quad 2/n \quad \dots \quad k/n \quad \dots \quad (n-1)/n$

en total so $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$

Ej = n = 1000, uno tiene 1000 intervalos,

$$\left[0,\frac{1}{1000}\right],\left[\frac{1}{1000},\frac{2}{1000}\right],\left[\frac{2}{1000},\frac{3}{1000}\right],\dots\left[\frac{998}{1000},\frac{999}{1000}\right],\left[\frac{999}{100},1\right]$$

largo: $\frac{1}{1000} = \frac{2}{1000} - \frac{1}{1000} = \frac{3}{1000} - \frac{2}{1000} - \dots$

La altura del $\square$ construye en un intervalo $[0, \frac{1}{n}]$, es $f(0) = 0^2 = 0$

alturas

$[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ es $f(1/n) = (\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}$

$[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}]$ es $f(\frac{2}{n}) = (\frac{2}{n})^2$

$\vdots$

$[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ es $f(\frac{k}{n}) = (\frac{k}{n})^2$

$\vdots$

$[\frac{n-1}{n}, 1]$ es $f(\frac{n-1}{n}) = (\frac{n-1}{n})^2$

Ahora sumamos Anchos · alturas

ancho es el mismo para todos los $\square$'s

todas las alturas

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(0 + \frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$$

arreglamos esa suma:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right)\right)$$

factor común:

$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right)$$

sumas que recordamos la clase pasada

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6}\right)$$

$$2(n-1)+1 = 2n-2+1 = 2n-1$$

Suma de $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ es

$n(n+1)(2n+1)/6$

Qué obtuvimos: área de la aproximación tomando el extremo izq, usando n rectángulos de igual largo:

Ej: usemos 10^{10} □'s

$$\text{Area} = \frac{1}{(10^{10})^3}\left(\frac{(10^{10}-1)10^{10}(2\cdot 10^{10}-1)}{6}\right)$$

= número que sale con la calculadora

Qué pasa si n es muy grande?

(cálculo 1 = $\lim\limits_{n\to\infty}$ de esto ??)

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right) = \frac{1}{6n^3}\left(2n^3-3n^2+n\right)$$

$$n(n-1)(2n-1) = n(2n^2-n-2n+1) = n(2n^2-3n+1)$$
$$= 2n^3-3n^2+n$$

$$= \frac{1}{6}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En el límite son 0 $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{3}{1000}$, $\frac{3}{1000000}$, $\frac{3}{10^{10}}$ $\downarrow 0$

La aproximación ∞'s rectángulos nos da $\frac{1}{3}$.

Ejercicio muy importante: hacer lo mismo, pero con el extremo derecho. Siguiente clase lo podemos comentar.

Spoiler: da el mismo resultado, 1/3.

Esto no es coincidencia.

$\boxed{\text{Definimos}}$ el área bajo f mediante este procedimiento

$$\text{Área} = \lim_{\substack{\text{cuando tomamos}\\ \square\text{'s cada vez más}\\ \text{finos}}} \text{Suma}(\underset{\square\text{'s}}{\text{anchos}} \cdot \underset{\square\text{'s}}{\text{Alturas}})$$

$[t_i, t_{i+1}]$

Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de largo Δx $(=\frac{1}{n})$, y las alturas son $f(t_i)$ (o $f(t_{i+1})$ o cualquier otro punto en $[t_i, t_{i+1}]$), entonces

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(t_i)}_{\text{alturas}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{anchos}}$$

se ve feo

es sólo eso

“aproximación” con
∞'s □'s

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot \Delta x$$

$\cancel{5+dx}$

definición
de este símbolo

dx: el de equis

$\int$: símbolo integral , a: límite inferior , f : integrando

, b: 〃 superior ,

Siempre juntos: $\int$ integrando dx

Obs: cambiar x por y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$$

$$= \int_a^b f(\text{papito})\,d\,\text{papito}$$

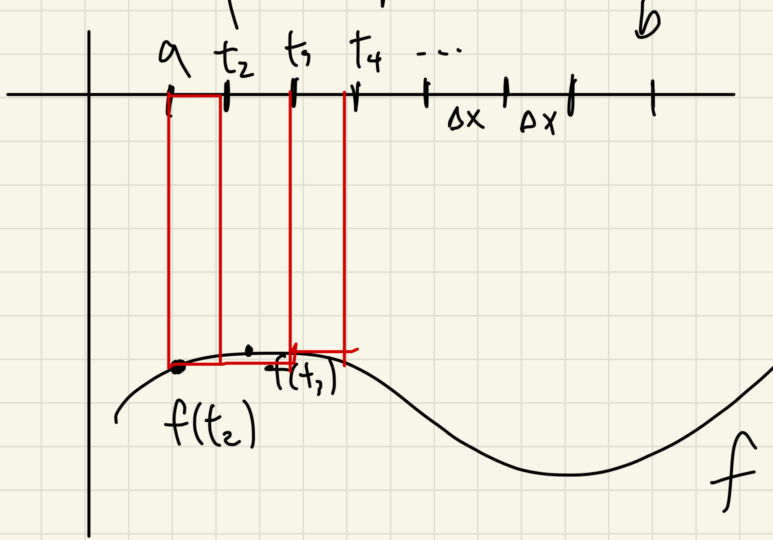
x es una variable que es sólo un nombre, y se puede llamar de cualquier forma

¿Qué hicimos? $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

Interpretación: si $f \geq 0$ en $[a,b]$, entonces

$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área entre f y el eje x en el intervalo $[a,b]$.

Pregunta: qué pasa si $f \leq 0$??



ancho $= \Delta x \geq 0$

altura $= f(t_i) \leq 0$

$$\sum \text{ancho} \cdot \text{altura} \leq 0$$

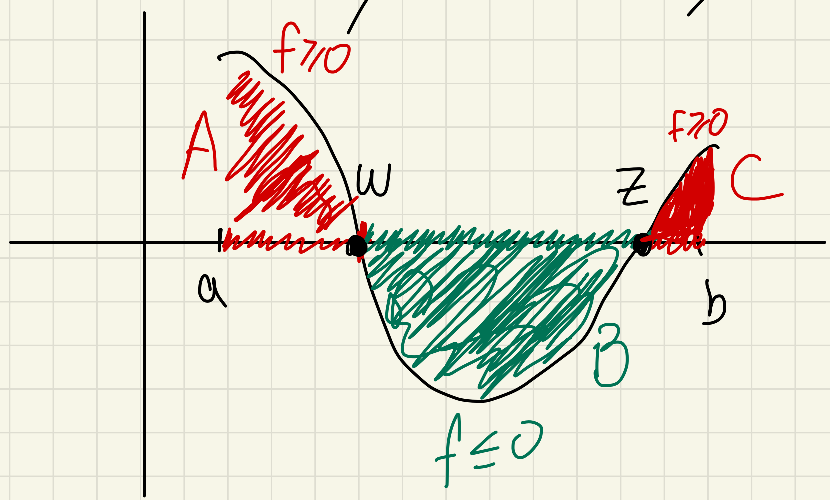
$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$$

En este caso, me da el área, pero con el signo opuesto.

$$f \leq 0 \text{ en } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\text{Área entre eje y } f.$$

Qué pasa si $\cancel{f \leq 0}$ o $\cancel{f \geq 0}$



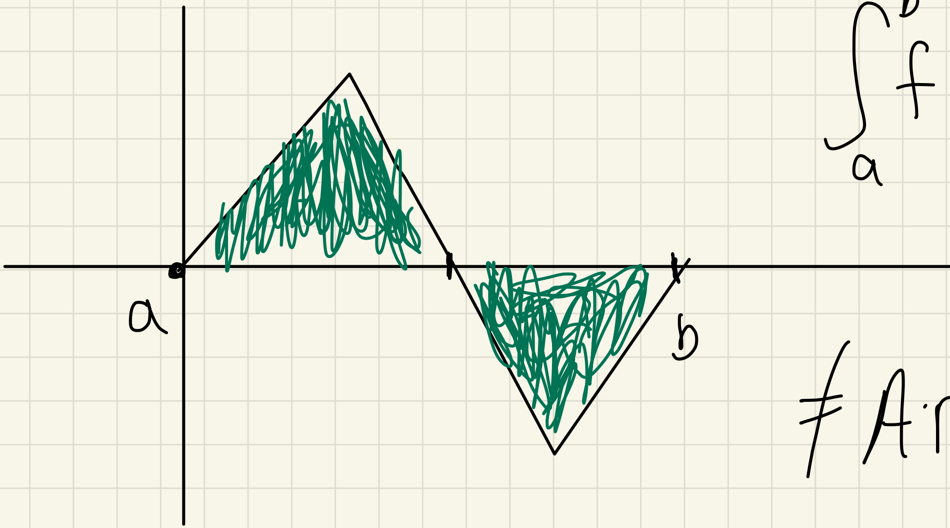
$$\int_a^b f(x)\,dx = ??$$

$$\int_a^w f(x)\,dx = A \quad , \quad \int_w^z f(x)\,dx = -B$$

$$\int_z^b f(x)\,dx = C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = A - B + C$$

$$= \text{área neta}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = A - A = 0$$

$$= \text{área neta} = 0$$

$$\neq \text{Área de verdad}$$