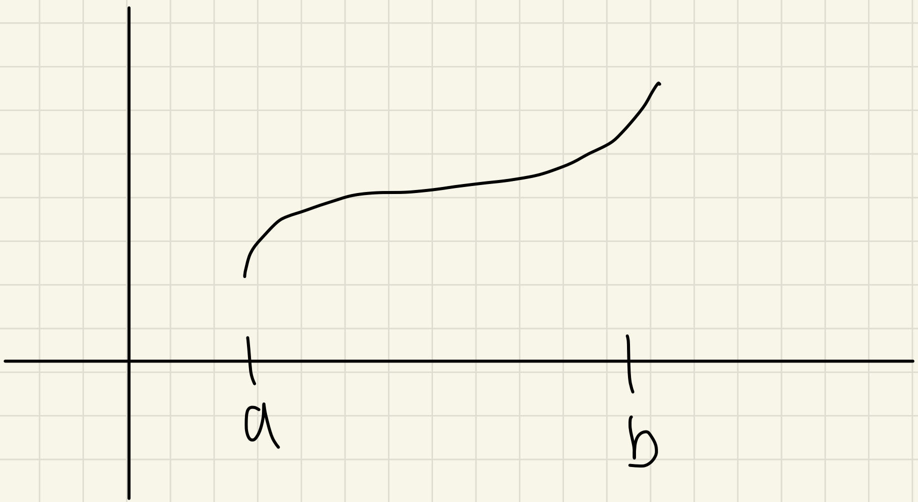
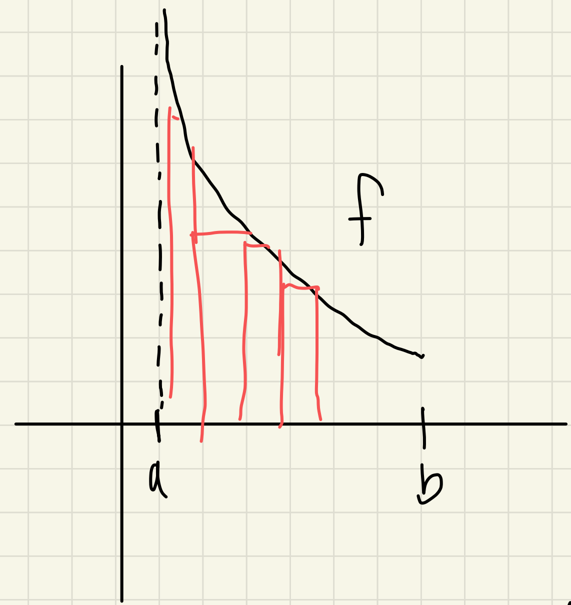
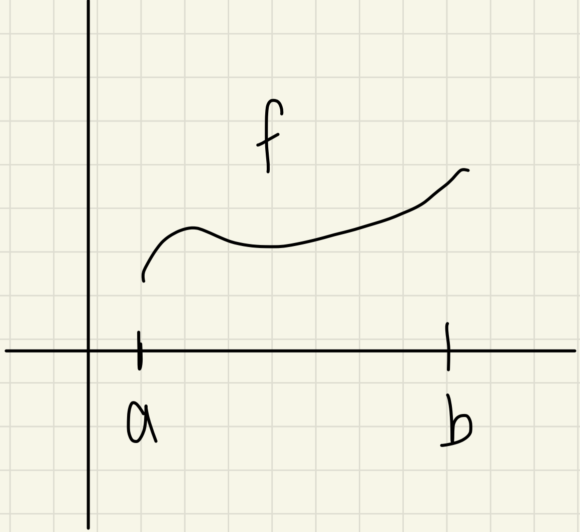
Clase 19:

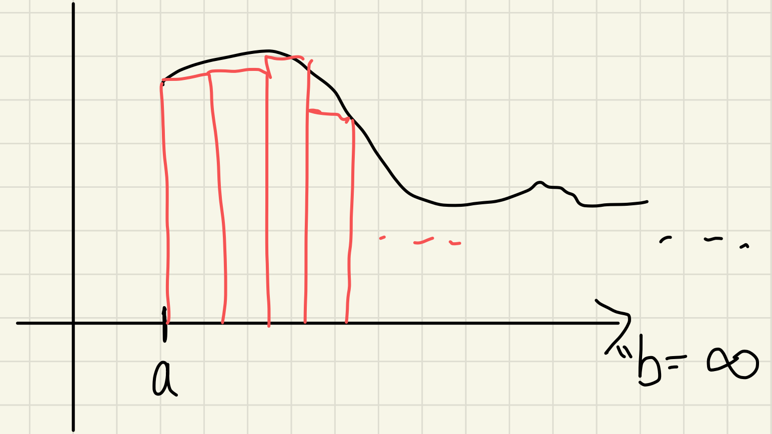
Hasta el momento, hemos integrado funciones "bonitas"





Tipo 2: Problema: f no es acotada





Tipo 1: Problema: queremos integrar sobre un intervalo infinito.

Solución: integrales impropias (≠ integrales indefinidas)

Caso tipo 1:

Ej: $f(x) = 1/x^2$, definida en $[1, \infty)$. Queremos

$$\text{"}\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx\text{"}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx = \int_1^\infty f(x)\,dx$$

En nuestro ejemplo:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = -\frac{1}{t} - -\frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{t}$$

Luego, aplicamos el límite

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = 1$$

$$\text{Area verde} = \int_1^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Definición:

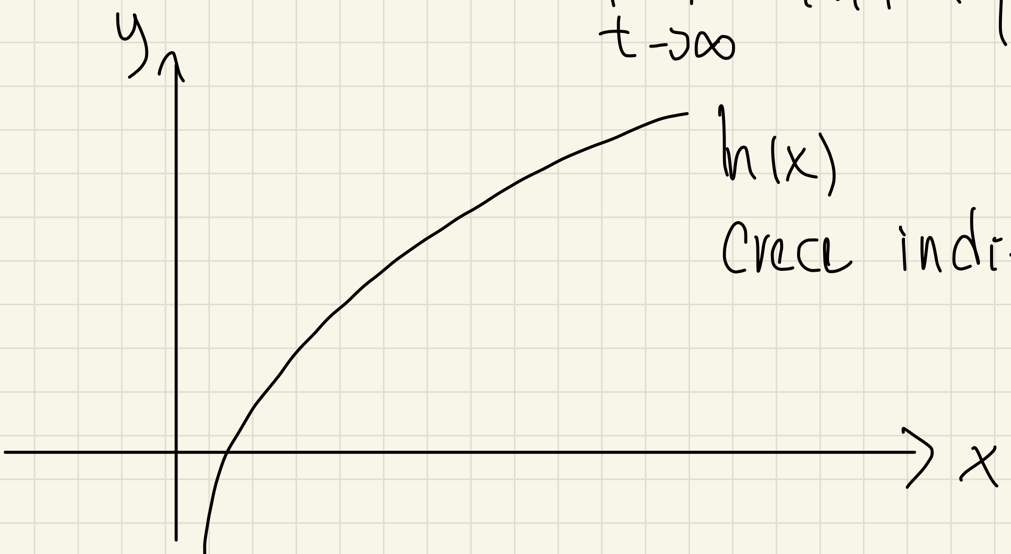
Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo $t \geq a$, ent

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Siempre y cuando el límite sea un número finito

Ej: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{t \to \infty} \ln|x| \Big|_1^{t} = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty$$

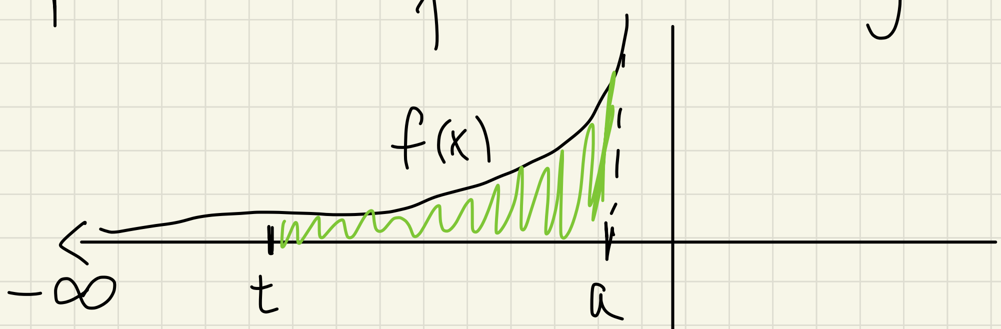


Crece indifinidamente

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ no existe (porque dio infinito). Vamos a decir que $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge.

Si $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$, es un número finito, decimos que converge

Qué pasa si queremos integrar hacia $-\infty$?



$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

Siempre y cuando el límite exista.

Qué pasa si queremos integrar una función sobre todo $\mathbb{R}$, o de otra forma, desde $-\infty$ hasta ∞??

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

Si ambas existen, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

Se puede usar cualquier a.

Ejemplos:

1. $\int_{-\infty}^{0} x e^{x}\, dx$

Sol: $\int_{-\infty}^{0} x e^{x}\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} x e^{x}\, dx$

ILATE

$\int x e^{x}\, dx = x e^{x} - \int e^{x}\, dx = x e^{x} - e^{x} + C$

$u = x \quad dv = e^{x} dx$

$du = dx \quad v = e^{x}$

$\int_{t}^{0} x e^{x}\, dx = \left(x e^{x} - e^{x} \right)\Big|_{t}^{0} = \left(0 \cdot e^{0} - e^{0}\right) - \left(t e^{t} - e^{t}\right)$

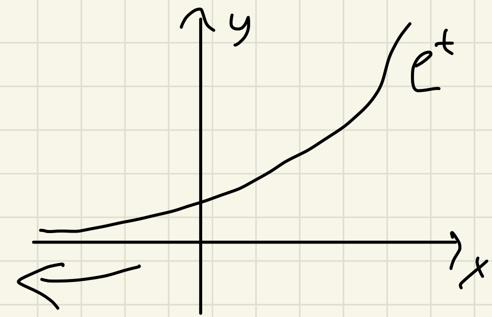
$$= -1 - te^t + e^t$$

Ahora sacamos el límite

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-1-te^t+e^t\right)$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

$$= -1 - \lim_{t\to-\infty} e^t t + 0$$



$$\lim_{t\to-\infty} e^t t = 0$$

#exp grande · #pd chico = #grande

exp chico · # pol grande = # chico

Para calcular ese límite formalmente, uno usa la regla de L'Hopital

$$\lim_{t \to \text{algo}} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{0}{0} \overset{\circ}{=} \frac{\infty}{\infty} \overset{\circ}{=} \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$= \lim_{t \to \text{algo}} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

$$\lim_{t \to -\infty} e^t t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t \to -\infty} - \frac{1}{e^{-t}} =$$

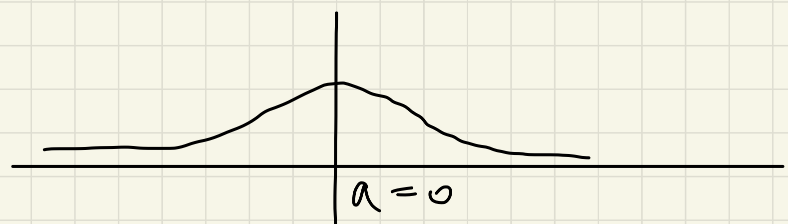
$$= -\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{e^{-t}} = -\lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$$

Volviando a la intagral

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} (-1 - te^{t} + e^{t})$$

$$= -1$$

Ej: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$



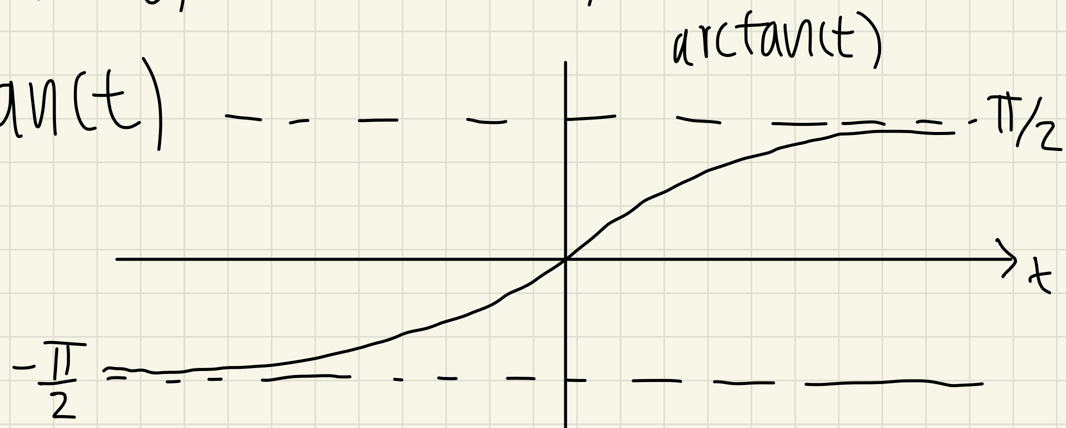
$$\int_{-\infty}^{\infty} \% \, dx = \int_{-\infty}^{0} \% \, dx + \int_{0}^{\infty} \% \, dx$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} \, dx \quad \arctan(x) \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \arctan(t) - \arctan(0)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \arctan(t)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

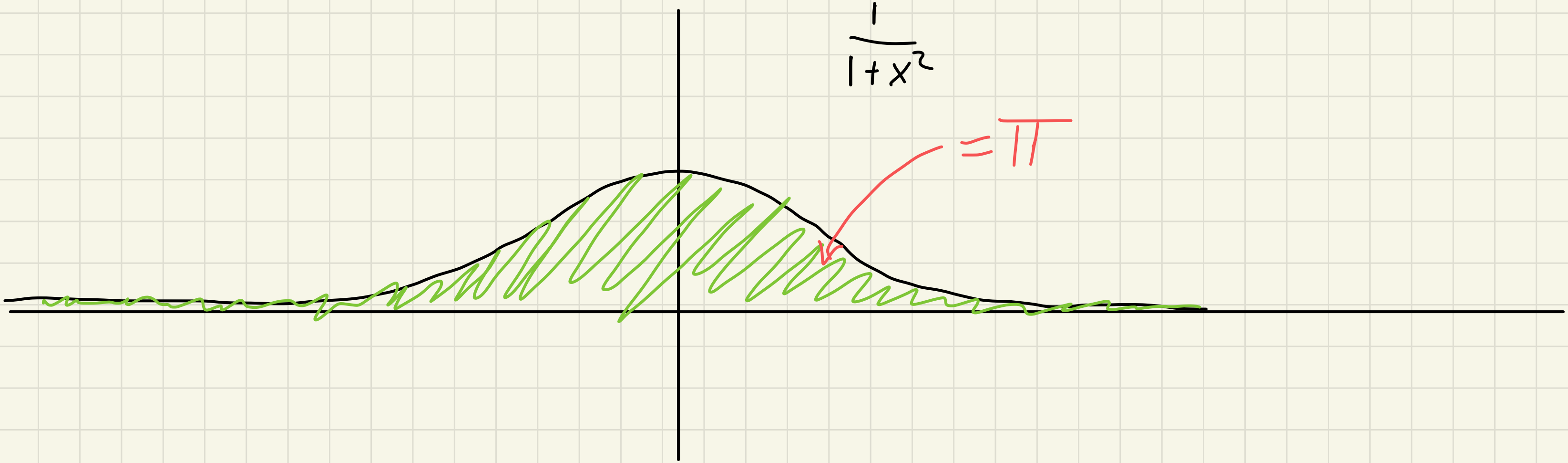
$$= \lim_{t\to-\infty} \arctan(x)\Big|_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(0 - \arctan(t)\right)$$

$$= -\lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Por lotanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{〃}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \text{〃}\,dx + \int_{0}^{\infty} \text{〃}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$



Ejemplo (Muy importante)

Para qué valores de p, la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

existe??

Sol:

- Caso $p=1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$, integral no existe.

$$\int x^a\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{a+1}}{a+1}, & a \neq -1 \\ \ln|x| & a=-1 \end{cases}$$

- Caso $p \neq 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right)$$

Ahora sacamos el límite:

$$\frac{1}{1-p}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right)$$

$$p>1 \Rightarrow p-1>0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{p-1}} = 0$$

$$= \frac{1}{t^{\text{positivo}}} \quad \text{como} \quad \frac{1}{t^3}\to 0$$

$$p<1 \Rightarrow p-1<0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{p-1}} = \infty$$

$$= \frac{1}{t^{\text{neg}}} \overset{\text{como}}{=} \frac{1}{t^{-2}} = t^2 \to \infty$$

$$\frac{1}{t^{pos}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad / \quad \frac{1}{t^{neg}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

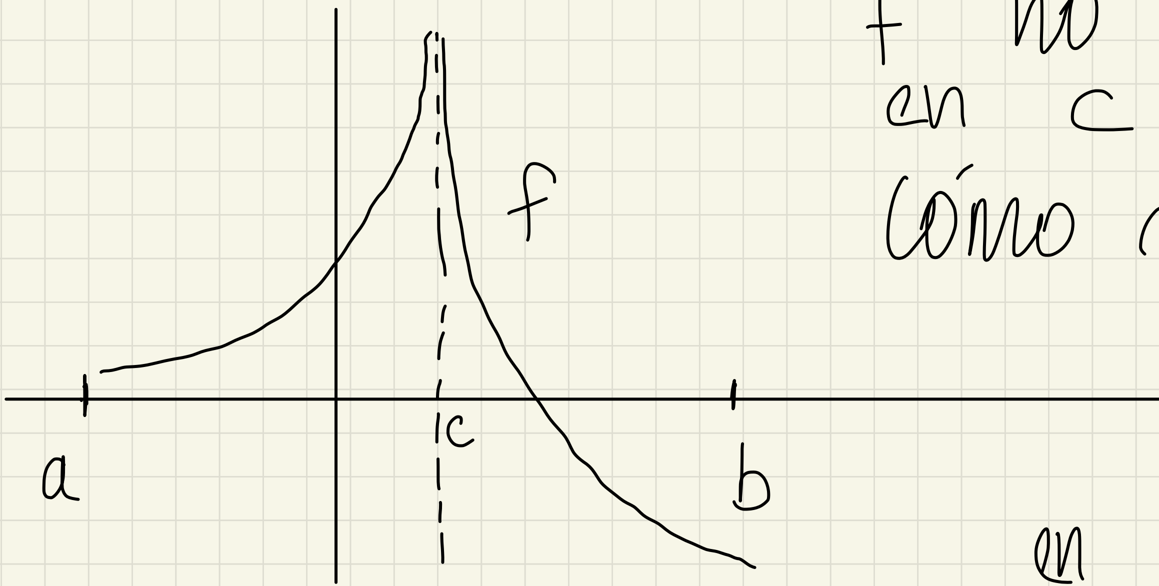
Resumimos:

$p>1$, el límite (y por lo tanto la integral) existe

$p<1$, el límite no existe

$p=1$, no existe. La integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ solo existe para $p>1$.

Integrales de tipo 2



f no es continua en c

Cómo definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

en este caso??

$$\int_a^c \quad , \quad \int_c^b$$