Clase 18: recapitulación de integrales

Hemos visto varias técnicas de integración

- sustitución
- partes
- sust. trigonom.
- fracciones parciales
- ...

Para una integral cualquiera, cómo decidir cuál usar??

Hay integrales que uno se las tiene que saber, o que las podemos dar por conocidas:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x$, $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x$

- $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| = -\ln|\cos x|$

- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$, $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$a^2 - x^2$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$a^2\operatorname{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha = a$

$a\cos\alpha > 0$

$\sqrt{a^2\cos^2\alpha} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\alpha}$

$x = a\operatorname{sen}\alpha$

$dx = a\cos\alpha \, d\alpha$

$= \int \frac{a\cos\alpha \, d\alpha}{a\cos\alpha}$

$= \int d\alpha = \alpha + C$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

- $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad , \quad \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}$$

- $$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x$$

- $$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\int \operatorname{senh} x \, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int e^x dx - \frac{1}{2} \int e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - -e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + C$$

$$= \cosh x + C$$

Indicaciones generales de cómo abordar

las integrales

1. Simplificar el integrando

Ej: • $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x} + x)\,dx$

$= \int (x^{1/2} + x)\,dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{x^2}{2} + C$

• $\int \dfrac{\tan\alpha}{\sec^2\alpha}\,d\alpha = \int \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} \cdot \cos^{\cancel{2}}\alpha\,d\alpha$

$= \int \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha\,d\alpha$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

$\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$

$u = \operatorname{sen} \alpha$

$du = \cos \alpha \, d\alpha$

$= \int u \, du$

$= \frac{1}{2} u^2 + C$

$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha + C$

• $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \, dx$

~~$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1$~~

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$= \int (\underline{\operatorname{sen}^2 x} + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \underline{\cos^2 x}) \, dx$

$= \int (1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x) \, dx = \dots$

sabemos hacer

2. Ver si hay una sustitución obvia:

Ej: $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

Parece sugerir fracciones parciales ("fracción de polinomios)

$u = x^2-1$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2-1| + C$$

3. Ver si la integral cae en un método de forma obvia:

Ej: $$\int \frac{x^3-2x^2+5x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}\,dx$$

Si bien es tedioso, sabemos que hay que usar fracciones parciales.

Ej: $$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \sec^2 x + \tan^2 x \sec^2 x \, dx$$

Sustituciones trigonométricas.

Lo más delicado es integración por partes, porque elegir mal el u y el dv nos puede costar mucho trabajo y tiempo perdido

Para esto, hay ciertas sugerencias (no son reglas, no siempre funcionan)

Funciones trascendentes:

exponenciales,
logaritmos,
trigometricas,
inversas trigonom,
hiperbolicas

Funciones algebraicas:
polinomios,
raíces,

$$\int (\text{Fcn tras}) \cdot (\text{Fcn alg})\, dx \rightsquigarrow$$ sugiere integrar por partes.

En este caso, cómo elegir el u y el dv??

Hay indicaciones

El u se toma igual a $f(x)$ donde $f(x)$ tiene la siguiente prioridad:

- I : inversas ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, ...)
- L : logaritmos
- A : algebraicas (x. x^2, x^3, $2x^5$, ...)
- T : trigonométricas ($\tan x$, $\cos x$, ...)
- E : exponenciales (e^x, e^{2x}, e^{-x}, 2^x, ...)

ILATE

Hay gente que usa LIATE, y en verdad no importa mucho cuál usar, porque es sólo una indicación

Ejemplos de esto:

Ej 1: $\int \underbrace{x}_{\text{algebraica}} \operatorname{sen}(\underbrace{3x-2}_{\text{trascendente}})\,dx$ ⇝ probemos integrar por partes.

$u = x$ $\qquad$ $dv = \text{sen}(3x-2)\,dx$

$du = dx$ $\qquad$ $v =$ función cuya derivada es $\text{sen}(3x-2)$

$= -\frac{1}{3}\cos(3x-2)$

$$\int x\,\text{sen}(3x-2)\,dx = \overset{uv}{x \cdot -\frac{1}{3}\cos(3x-2)} - \overset{vdu}{\int -\frac{1}{3}\cos(3x-2)\,dx}$$

$$= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\int \cos(3x-2)\,dx$$

$$= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\text{sen}(3x-2) + C$$

$$= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) + \frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x-2) + C$$

Ej: $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int (\ln x)\cdot \frac{1}{x^2}\,dx$

tras alg $\rightsquigarrow$ por partes

$u = \ln x$ $\qquad dv = \frac{1}{x^2}\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $\qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \overset{uv}{(\ln x)\cdot \frac{-1}{x}} - \int \overset{v}{\frac{-1}{x}} \cdot \overset{du}{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

Ej: $\int \arctan x \, dx$

ojo: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

$\cancel{\int \arctan x \, dx = \frac{1}{1+x^2} + C}$

$$= \int (\arctan x) \cdot 1 \, dx$$

tras (inversa) algebr

$$\int \ln x \, dx = \int (\ln x) \cdot 1 \, dx$$

$u = \ln x \qquad dv = 1dx$

ILATE

$u = \arctan x \qquad dv = 1 \, dx$

$du = \dfrac{1}{1+x^2} \, dx \qquad v = x$

$$\int \arctan x \, dx = \underbrace{(\arctan x) \cdot x}_{u \cdot v} \underbrace{- \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx}_{- \int v \, du}$$

$$= (\arctan x)x - \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad t = 1+x^2$$

$$\frac{dt}{2} = x\,dx$$

$$= \int \frac{dt/2}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+x^2|$$

$$\int \arctan x \, dx = (\arctan x) \cdot x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C$$

Ej: $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$t = \sqrt{x}$$

$$t^2 = x$$

$$2t\,dt = dx$$

$$= \int e^t \cdot 2t \, dt$$

$$= 2 \int t \, e^t \, dt$$

alg tras

$$= 2\int \underset{\text{alg}}{t}\,\underset{\text{exp}}{e^{t}}\,dt$$

ILATE

$= u$

$t = \sqrt{x}$

$u = t \qquad dv = e^{t}\,dt$

$du = dt \qquad v = e^{t}$

$$2\int t e^{t}\,dt = 2\big(\overset{u \cdot v}{t e^{t}} - \overset{\int v\,du}{\int e^{t}\,dt}\big)$$

$$= 2(te^{t} - e^{t}) + C$$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + C$$

Ej: $\int \underset{\text{alg}}{x^3} \underset{\text{alg}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Obs: ILATE no da una sugerencia obvia, pues ambas son algebraicas

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$dv = \sqrt{4-x^2}\,dx$

$v = \text{dificil} = \int \sqrt{4-x^2}\,dx$

$$= \int x^2 \cdot x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Por otro lado, si hago

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$dv = x\sqrt{4-x^2}\,dx$

$v = \int x\sqrt{4-x^2}\,dx$

$t = 4 - x^2 \qquad dt = -2x\,dx$

$-\frac{dt}{2} = x\,dx$

$v = \int \sqrt{t} \cdot -\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3}t^{3/2}$

$= -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}$

$$\text{Integral original} = \overbrace{x^2\left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}\right)}^{uv} \overbrace{- \int -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}\cdot 2x\,dx}^{-\int v\,du}$$

$$= -\frac{1}{3}x^2(4-x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}\underbrace{\int (4-x^2)^{3/2}\,x\,dx}$$

$$t = 4 - x^2$$
$$dt = -2x\,dx$$

$$= \int t^{3/2}\cdot -\frac{dt}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{3/2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{5/2}}{5/2} = -\frac{1}{5}t^{5/2}$$

$$= -\frac{1}{5}(4-x^2)^{5/2}$$

Int origin $= -\frac{1}{3}x^2(4-x^2)^{3/2} - \frac{2}{3\cdot 5}(4-x^2)^{5/2} + C$

Ej: encontrar el u y el dv indicados:

1. $\int (\ln x)^2 dx = \int (\ln x)^2 \cdot 1\, dx$

$u = (\ln x)^2 \qquad dv = 1\, dx$

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

$u =$ ILATE

2. $\int x^3 \ln(5x)\,dx$

$u = \ln(5x) \qquad dv = x^3\,dx$

$$\int x^3 \ln(5x)\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(5x) - \frac{1}{16}x^4 + C$$

3. $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ ILATE

$u = x$ $dv = \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

$$\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} x \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \operatorname{sen}(2x) + C$$