Clase 16: Técnicas de integración

La integral

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad ✓✓$$

¿Qué pasa si cambiamos el integrando un poco?

$$\int \frac{1}{x+3}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

$$= \ln|x+3| + C$$

$$u = x + 3 \qquad du = dx$$

Qué pasa si consideramos

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx \qquad \begin{aligned} u &= x^2-1 \\ du &= \underline{2x}\,dx \end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{1}{x^2-1} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{x}+1\cancel{-x}+1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{x^2 - 1}$$

Podemos descomponer $1/(x^2-1)$ como una suma de dos fracciones más simples

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

La pregunta es: cómo se me ocurre ese tipo de des composición?

R: técnica de fracciones parciales.

Veamos en nuestro ejemplo

1. $\frac{1}{x^2-1}$, el denominador se puede factorizar

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

2. Pensamos que nuestra fracción original se puede escribir como suma de fracciones con denominadores iguales a los factores que tenemos:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

3. La idea es encontrar esa A y B.

Para eso, hacemos la suma de estas fracciones y vemos qué da:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A - B}{(x-1)(x+1)}$$

4. Paso clave: en estas fracciones, quiero

que $\text{num}(\text{lado der}) = \text{num}(\text{lado izq})$
$\text{den}(\quad \%\quad) = \text{den}(\quad \% \quad)$ ✓✓

$$1 = X(A+B) + (A-B)$$

Aquí <u>no</u> hay X

Aquí sí, a menos que $A+B=0$

Necesitamos que $A+B=0$
Por otro lado, una vez que $A+B=0$
nos queda

$$1 = A - B$$

Entonces, tenemos dos ecuaciones para dos incógnitas:

$$A + B = 0$$
$$A - B = 1$$

5. Resolvemos: $2A = 1$

$$A = 1/2 \quad B = -1/2$$

6. Volvemos al problema original:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

que es lo que habíamos planteado al principio

Este es el método de fracciones parciales

Ej: $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$

Seguimos la misma lógica:

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{x+5}{\%} = \frac{x(A+B) + 2A - B}{(x-1)(x+2)}$$

$1 = A + B$ Resolvamos: $A = 2$

$5 = 2A - B$ $B = -1$

De aquí

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int \% \, dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Ej: $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$

$$= x(x-c_1)(x-c_2)$$

$$c_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad c_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a=2 \quad , \quad b=3 \quad , \quad c=-2$$

$$C_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot -2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 + \sqrt{9+16}}{4}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = 1/2$$

$$C_2 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$(x - c_1)(x - c_2) = (x - 1/2)(x + 2)$$

$$= x^2 + 2x - \frac{1}{2}x - 1$$

$$= x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

Queriamos factorizar

$$2x^2+3x-2 = 2\left(x^2+\tfrac{3}{2}x-1\right)$$
$$= 2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x+2)$$
$$= (2x-1)(x+2)$$

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x-1)(x+2)$$

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)}{x(2x-1)(x+2)}$$

... haciando algebrita ...

$$x^2 + 2x - 1 = x^2(2A + B + 2C) + x(3A + 2B - C) + (-2A)$$

$$2A + B + 2C = 1$$

$$3A + 2B - C = 2$$

$$-2A = -1$$

Resolvemos: $A = 1/2$, $B = 1/5$, $C = -\frac{1}{10}$

Volvamos a la integral:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{5}\int\frac{1}{2x-1}\,dx - \frac{1}{10}\ln|x+2|$$

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{2}$$

$$u = 2x-1$$

$$\frac{du}{2} = dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|2x-1|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

Preguntas que quedan: • qué pasa si el num tiene grado mayor que el denom. ?

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x+7}\,dx \quad ??$$

• Qué pasa si hay factores repetidos en el denom??

$$\int \frac{x+1}{(x-3)^2}\,dx$$