

Clase 1b : Técnicas de integración

La integral

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \checkmark$$

Qué pasa si cambiamos el integrando un poco?

$$\int \frac{1}{x+3} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$
$$= \ln|x+3| + C$$

$$u = x+3 \quad du = dx$$

Que' pasa si consideramos

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$u = x^2 - 1$$

$$du = 2x dx$$

Observemos que

$$\frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1 - x+1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{x^2 - 1}$$

Podemos descomponer $1/(x^2 - 1)$ como una suma de dos fracciones más simples

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

La pregunta es: ¿Cómo se me ocurre ese tipo de descomposición?

R: técnica de fracciones parciales.

Veamos un nuestro ejemplo

1. $\frac{1}{x^2 - 1}$, el denominador se puede factorizar

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

2. Pensamos que nuestra fracción original se puede escribir como suma de fracciones con denominadores iguales a los factores que tenemos:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

3. La idea es encontrar esa A y B.

Para eso, hacemos la suma de estas fracciones y vemos qué da:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A-B}{(x-1)(x+1)}$$

4. Paso clave: en estas fracciones, quiero

$$\text{que } \text{num}(\text{lado der}) = \text{num}(\text{lado izq})$$

✓✓

$$\text{den}(\quad \% \quad) = \text{den}(\quad \% \quad)$$

$$1 = X(A+B) + (A-B)$$

Aquí no hay X

Aquí sí, a menos que $A+B=0$

Necesitamos que $A+B=0$

Por otro lado, una vez que $A+B=0$
nos queda

$$1 = A - B$$

Entonces, tenemos dos ecuaciones para dos incógnitas:

$$A + B = 0$$

$$A - B = 1$$

5. Resolvemos: $2A = 1$
 $A = \frac{1}{2}$ $B = -\frac{1}{2}$

6. Volvemos al problema original:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

que es lo que habíamos planteado al principio

Este es el método de fracciones parciales

Ej: $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$

Seguimos la misma lógica:

$$\frac{x+s}{x^2+x-2} = \frac{x+s}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{x+5}{\%} = \frac{x(A+B) + 2A - B}{(x-1)(x+2)}$$

$$1 = A + B$$

Resolvemos: $A = 2$

$$5 = 2A - B$$

$$B = -1$$

De aquí

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int \% dx = 2 \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= 2 \ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Ej: $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2)$$

$$= x(x - c_1)(x - c_2)$$

$$c_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$c_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2, b = 3, c = -2$$

$$C_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot -2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 16}}{4}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{-3 - 5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$(x - C_1)(x - C_2) = (x - \frac{1}{2})(x + 2)$$

$$= x^2 + 2x - \frac{1}{2}x - 1$$

$$= x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

Queríamos factorizar

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x - 2 &= 2(x^2 + \frac{3}{2}x - 1) \\&= 2(x - \frac{1}{2})(x + 2) \\&= (2x - 1)(x + 2)\end{aligned}$$

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$= \frac{A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)}{x(2x-1)(x+2)}$$

... haciendo
algebrita ...

$$= x^2(2A+B+2C) + x(3A+2B-C) + (-2A)$$

$$x^2 + 2x - 1$$

$$2A + B + 2C = 1$$

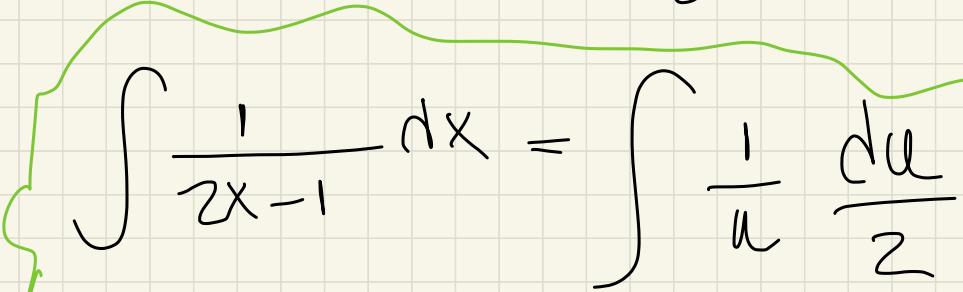
$$3A + 2B - C = 2$$

$$-2A = -1$$

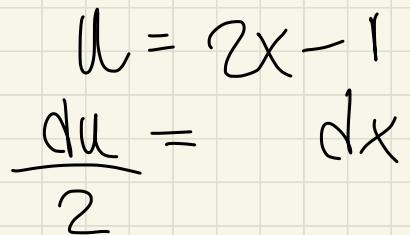
Resolvemos: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{10}$

Solvaremos a la integral:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{x+2} dx$$
$$= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{5} \int \frac{1}{2x-1} dx - \frac{1}{10} \ln|x+2|$$


$$\int \frac{1}{2x-1} dx = \int \frac{1}{u} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u|^c = \frac{1}{2} \ln|2x-1|$$


$$u = 2x - 1$$
$$\frac{du}{2} = dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \ln|2x-1| - \frac{1}{10} \ln|x+2| + C$$

Preguntas que quedan: • qué pasa si el numerador tiene grado mayor que el denominador?

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x+7} dx ??$$

• Qué pasa si hay factores repetidos en el denominador??

$$\int \frac{x+1}{(x-3)^2} dx$$