Clase 15: técnicas de integración

Hemos visto:

- Sustitución
- Partes
- Integrales trigonométricas

Hoy veremos: sustitución trigonométrica.

Ej: $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Se puede hacer bien con $u = a^2 - x^2$

$du = -2x\,dx$

Qué pasa si no tenemos la x fuera de la raiz?

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$u = a^2 - x^2$ no sirve (no hay cómo formar el du). $u = h(x)$

Consideremos el siguiente cambio:

$$x = a \operatorname{sen} u \qquad\qquad x = g(u)$$

$$dx = a \cos u \, du$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \int \sqrt{a^2\cos^2 u}\; a\cos u\, du$$

$a > 0$

$$= \int a|\cos u| \cdot a\cos u\, du$$

asumiendo $\cos u > 0$

$$= a^2 \int \cos^2 u\, du$$

$$= a^2 \left[\text{integral que ya hicimos} \right]$$

$$x^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 u$$

$$\operatorname{sen}^2(u) + \cos^2(u) = 1$$

$$\cos^2(u) = 1 - \operatorname{sen}^2(u)$$

$$a^2\cos^2(u) = a^2 - a^2\operatorname{sen}^2(u)$$

$$= a^2 - x^2$$

$$\cancel{\sqrt{a^2\cos^2 u} = a\cos u}$$

$$\sqrt{a^2\cos^2 u} = |a\cos u|$$

si $a > 0$

$$= a|\cos u|$$

$$= a^2\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u)\cos(u)\right) + C$$

$$= a^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C$$

$x = a\operatorname{sen} u$

$\frac{x}{a} = \operatorname{sen} u$

$u = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$

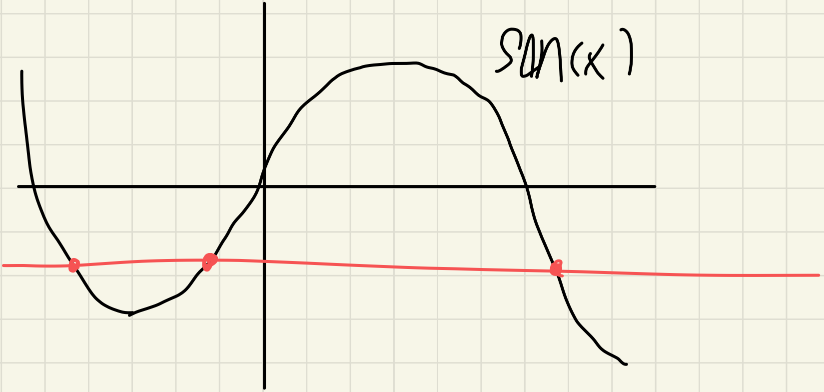
$\cos^2(u) = 1 - \operatorname{sen}^2(u)$

$= 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$

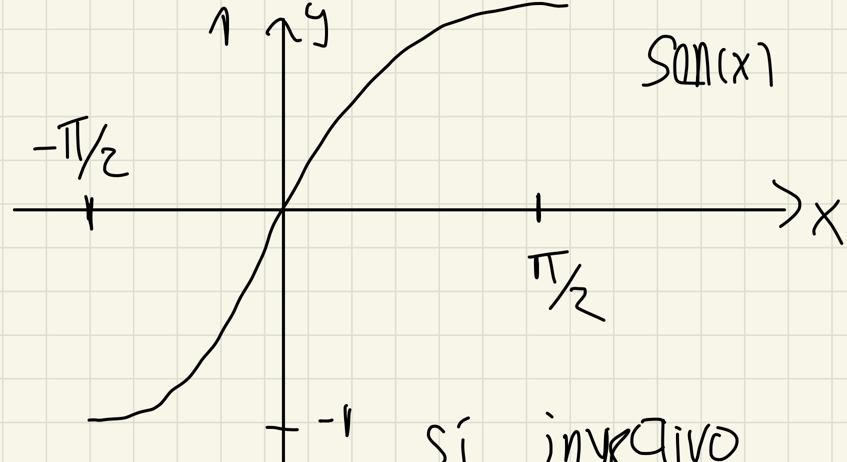
$\cos(u) = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

Hay que tener cuidado con este cambio, por que por ej, arcsen (y) no está definido para todo y:

$\operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$, $\operatorname{arcsen}(2) = ??$

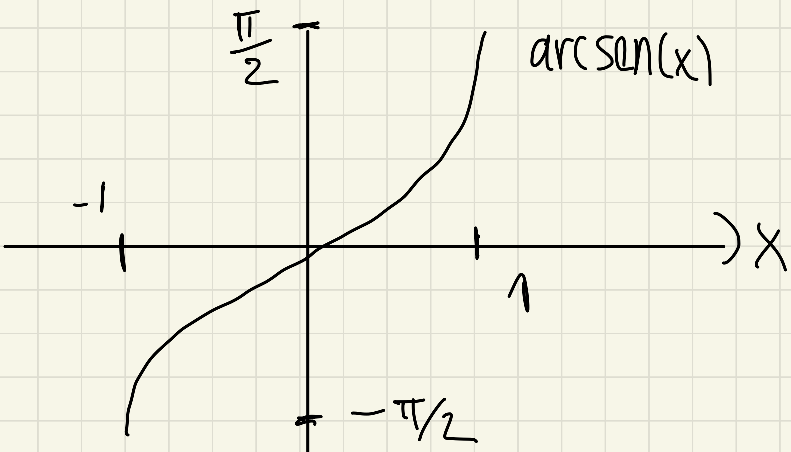


no injectivo



sí inyectivo

inversa: arcsen:



$$x = \operatorname{sen}(u)$$

$$u = \operatorname{arcsen}(x)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \ldots dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi} x \cdots dx \xrightarrow{x = \text{sen}(u)} \cancel{}$$

Vamos a ver ejemplos de esto.

Ej: integrales indefinidas:

1. $$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$$

$$x = 3\,\text{sen}\,u \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi/2\right)$$

$$dx = 3\cos u\, du$$

Sust. Trig. es buena para integrandos con estas expresiones

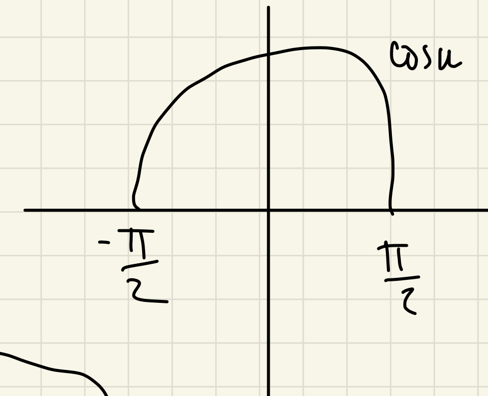
- $\sqrt{a^2 - x^2}$
- $\sqrt{a^2 + x^2}$
- $\sqrt{x^2 - a^2}$

$$x^2 = 9\,\text{sen}^2 u$$

$$9 - x^2 = 9 - 9\,\text{sen}^2 u = 9(1-\text{sen}^2 u) = 9\cos^2 u$$

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9\cos^2 u} = 3|\cos u|$$

$$= 3\cos u$$



$\cos(u) > 0$ en este interv.

Entonces

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3\cos u}{9\,\text{sen}^2 u}\cdot 3\cos u\,du$$

$$= \int \frac{\cos^2 u}{\text{sen}^2 u}\,du$$

$$= \int \cot^2 u \, du$$

$$\cot^2(u) = \csc^2(u) - 1$$

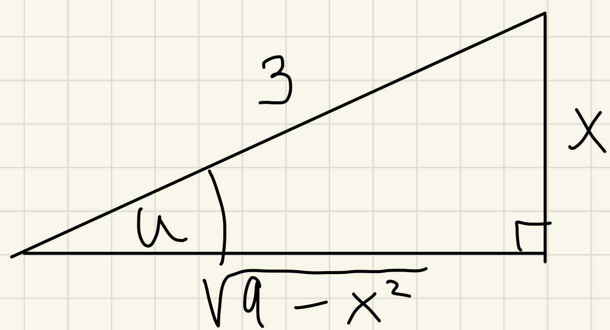
$$= \int (\csc^2(u) - 1)\, du$$

$$\frac{d}{du}\cot(u) = -\csc^2(u)$$

$$= -\cot(u) - u + C$$

Cómo volvemos a la variable x??

$$\frac{x}{3} = \operatorname{sen} u$$



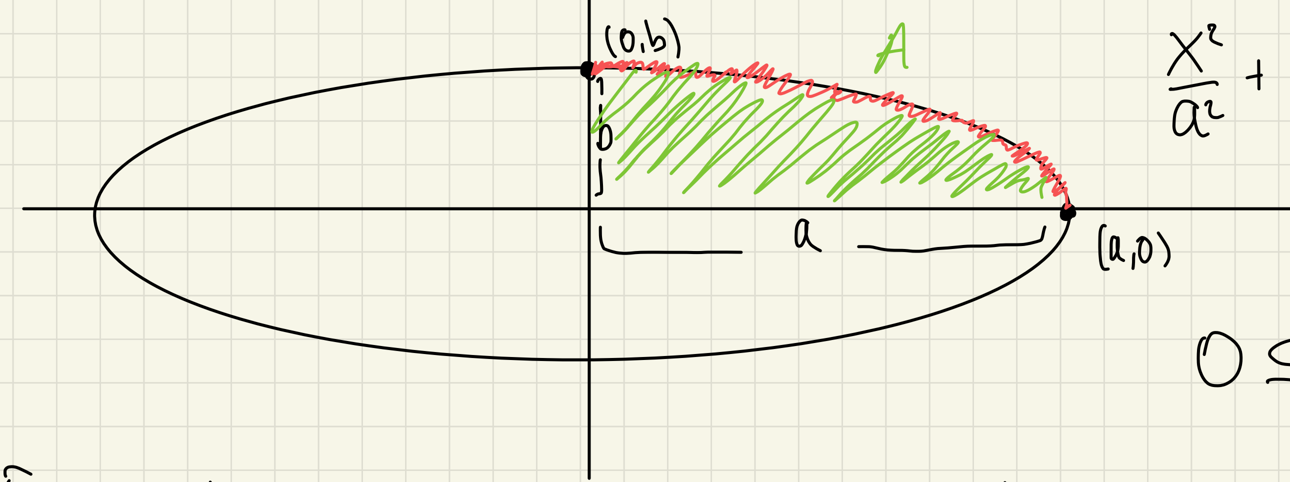
De aquí,

$$\cot(u) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \qquad u = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Con esto

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Ej: Calcule el área de una elipse de semiejes a y b



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$0 \leq x \leq a$$

En el tramo rojo, uno puede expresar el borde de la elipse como función de x:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$$= b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Área bajo la curva $f(x)$ es $\int_{\lim}^{\lim} f(x)\,dx$

$$A = \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \int_0^a b\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x = a\,\text{sen}\,u$

$dx = a\cos u\,du$

Qué pasa con los lim de la integral??

X está entre 0 y a

- Cuánto tiene que valer u para obtener

$x = 0$ de la relación $x = a \operatorname{sen} u$

$\Longrightarrow u = 0$, pues $a \cdot \operatorname{sen}(0) = 0$.

- Cuánto tiene que valer u para obtener $x = a$??

$x = a \operatorname{sen}(u)$

$\Longrightarrow u = \pi/2$, pues $a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$

Entonces $0 \leq u \leq \pi/2$. Ahora, la integral

$$\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$x = a \operatorname{sen}(u)$

$dx = a \cos(u)\, du$

$$X^2 = a^2 \operatorname{sen}^2(u) \qquad a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 u$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\,|\cos u|$$

Ah, en el intervalo $0 \leq u \leq \pi/2$, $\cos u$ es positivo, así que $|\cos u| = \cos u$

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{b}{a}\, a\cos u \cdot a\cos u\, du$$

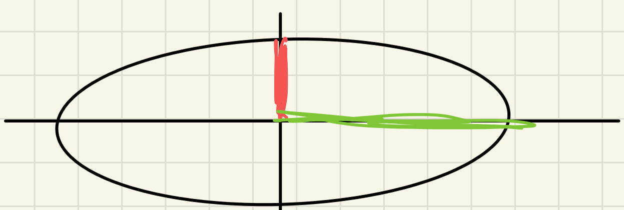
$$= ab\int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\, du$$

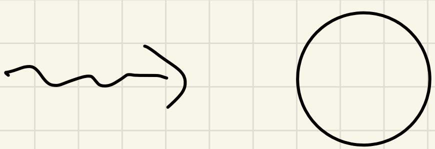
$$= ab\,\frac{1}{2}\left(u + \operatorname{sen}(u)\cos(u)\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= ab\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab\pi}{4}$$

Como A es un cuarto del área de la elipse, uno tiene que el área total es $ab\pi$.

Interesante: si $a = b = r$





$$\text{área} = \pi \cdot a \cdot b$$
$$= \pi \cdot r \cdot r = \pi r^2$$

Ej: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$\boxed{\text{La sustitución no es } x = 2\,\text{sen}\,u \qquad x^2 = 4\,\text{sen}^2 u \rightarrow x^2+4 = 4(\text{sen}^2 u + 1)}$

Uno se acuerda de

$$(\tan u)^2 + 1 = (\sec u)^2$$

Hacemos la sustitución $\underline{x = 2\tan u}$

$-\pi/2 < u < \pi/2$

$$x^2 = 4\tan^2 u \Rightarrow x^2+4 = 4\tan^2 u + 4$$
$$= 4(\tan^2 u + 1)$$
$$= 4\sec^2 u$$

$$\sqrt{x^2+4} = 2|\sec u| \qquad \sec(u) = \frac{1}{\cos u}$$

$\sec(u)$ y $\cos(u)$ tienen el mismo signo, y $\cos(u) > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$, así que $\sec(u) > 0$ también $\Rightarrow |\sec u| = \sec u$

$$x = 2\tan u \Rightarrow dx = 2\sec^2 u \, du$$

Luego

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{1}{4\tan^2 u \cdot 2\sec u} \cdot 2\sec^2 u \, du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec u}{\tan^2 u}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\,du$$

$$t = \operatorname{sen} u$$
$$dt = \cos u \, du$$

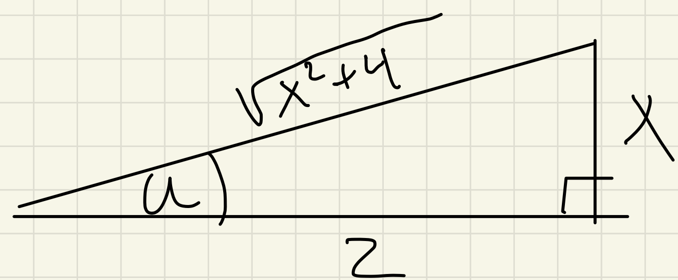
$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{t} + C \qquad \left\{ t^{-2} \rightsquigarrow \frac{t^{-1}}{-1} \right.$$

Hay que devolverse a la variable original, que es x

$$I = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4\,\mathrm{sen}\,u} + C$$

$$x = 2\tan u$$

$$\frac{x}{2} = \tan u$$



$$\operatorname{sen}(u) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} u} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$$

Con eso

$$I = \frac{-1}{4 \operatorname{sen} u} + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C$$