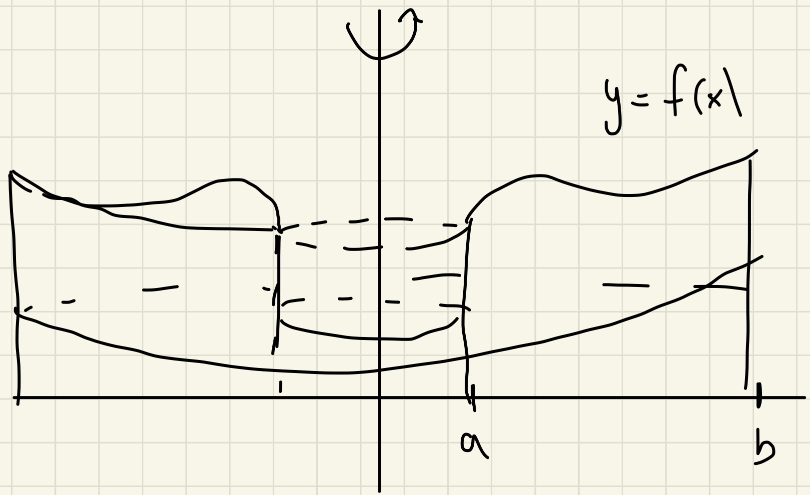
Clase 13:

Aplicaciones de la integral: volúmenes de sólidos de Revolución.

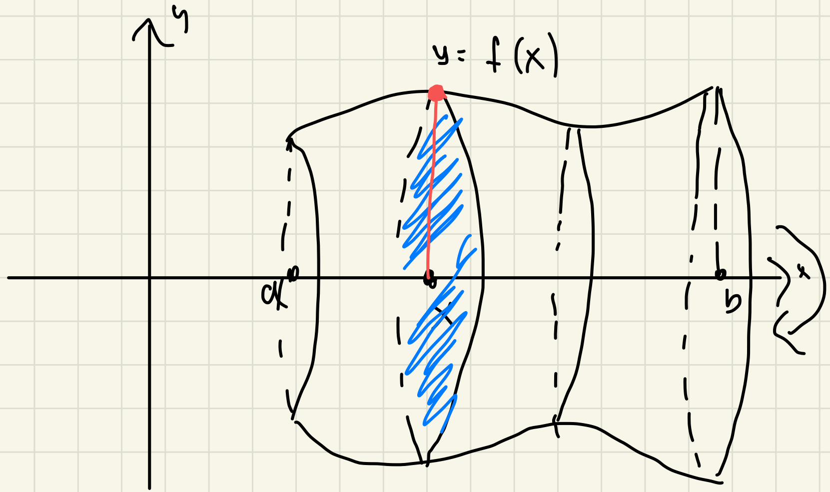
Vimos: método cascarones cilíndricos:



$$\text{vol} = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Otros métodos:

Método de discos:



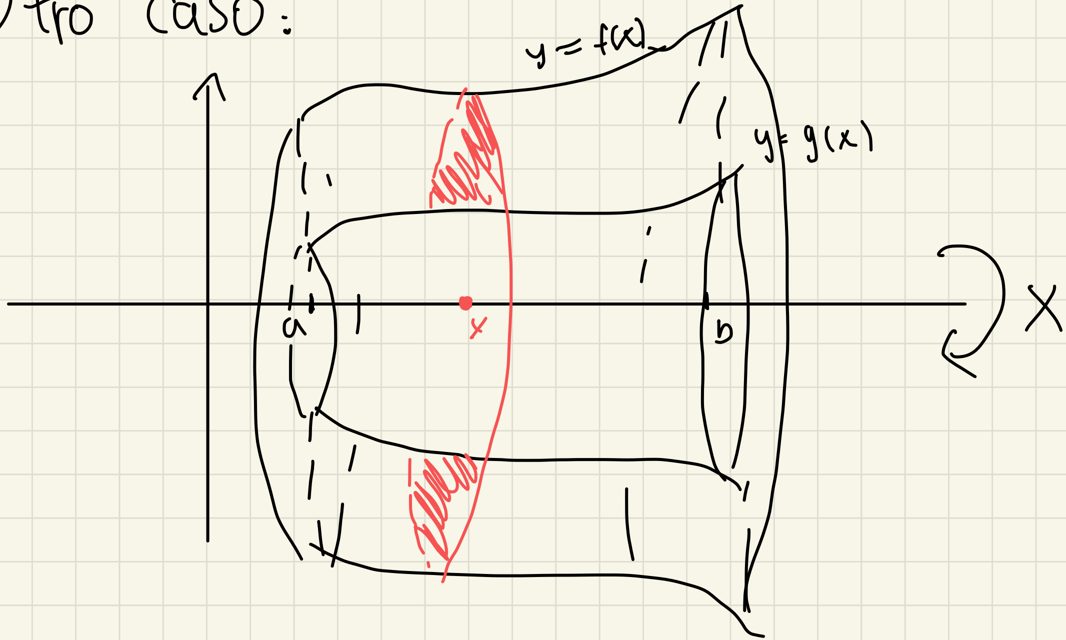
sección transv = disco de radio f(x). Su área es

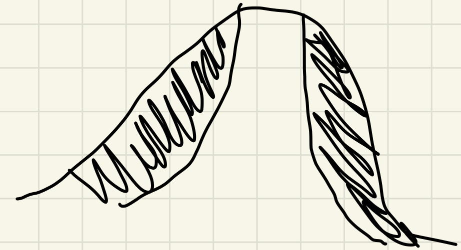
$$A(x) = \pi (f(x))^2$$

$$\text{Vol} = \int_a^b A(x)\,dx$$

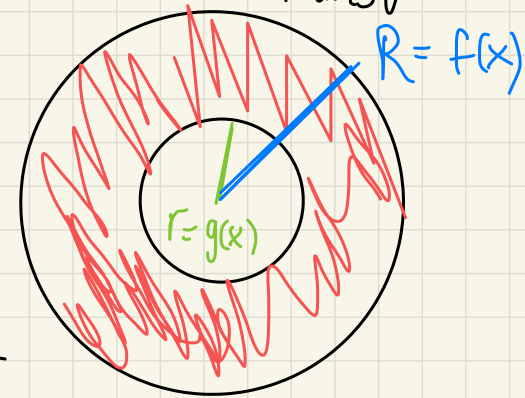
$$= \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

Otro caso:





Sección transv.:



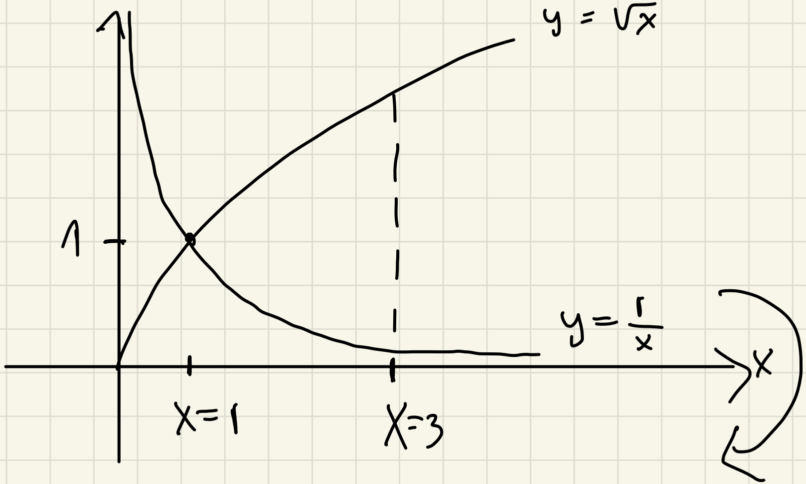
El área roja $A(x) = \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi \left(f^2(x) - g^2(x) \right)$

$$\text{Vol} = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$$

Método de anillos (arandelas).

Ej: calcular el volumen del sólido generado al rotar la región entre las curvas $y = 1/x$ e $y = \sqrt{x}$, entre $x=1$ y $x=3$.



Dónde se cortan las curvas ??

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 1 = x \cdot \sqrt{x} = x^{3/2}$$

$$\rightarrow x = (\sqrt[3]{1})^2 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1$$

Método de anillos:

$$Vol = \int_a^b \pi (f^2 - g^2) dx$$

$a = 1$, $b = 3$

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = 1/x$

$$= \int_1^3 \pi\left(\sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)dx = \int_1^3 \pi\left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \pi\left(\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \pi\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3 + \frac{1}{x}\Bigg|_1^3\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{10}{3}$$

Técnicas de integración

Integración por partes

Más importante, después de sustitución.

Recordamos la regla del producto para derivadas:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Despejamos $f \cdot g'$:

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

Integrando

$$\int f \cdot g' \, dx = \int (f \cdot g)' \, dx - \int f' \cdot g \, dx$$

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx$$

Pasar derivada de la g a la f, esperando que esto haga más fácil el problema.

Hacemos una sustitución $u = f(x) \Rightarrow du = f'dx$

$v = g(x) \Rightarrow dv = g'dx$

$$\int \underbrace{f}_{u} \cdot \underbrace{g'dx}_{dv} = \underbrace{f}_{u} \cdot \underbrace{g}_{v} - \int f' \cdot \underbrace{g}_{v} dx$$

$v\,du$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Un día vi una vaca vestida de uniforme

Cómo se usa esto?? $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Ej: $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Hay que ver quién es u y quién es v??

Tomamos $u = x$ $\qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$

$du = 1dx \qquad v = -\cos x$

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x)\cdot dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Qué pasa si elegimos "mal" la u y la v.??

$$u = \operatorname{sen} x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \cos x \, dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \operatorname{sen} x = (\operatorname{sen} x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \cos x \, dx$$

más complicado

...

Ej: $\int \ln x \, dx$

$$\left\{ \int u\,dv = uv - \int v\,du \right\}$$

Sol: $u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$

$$\int \ln x \, dx = (\ln x)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= (\ln x)\cdot x - \int dx \qquad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$= x(\ln x) - x + C$$

Está bien esto??

$$f(x) = x(\ln x) - x + c$$

$$f'(x) \overset{??}{=} \ln(x) \quad ??$$

$$f'(x) = x'(\ln x) + x(\ln x)' - x' + c'$$

$$= \ln x + \cancel{x \cdot \frac{1}{x}} - \cancel{1}$$

$$= \ln x$$

Está bien.

Ej: $\int t^2 e^t \, dt = I_1$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= \cancel{uvu}$$

$u = t^2 \qquad dv = e^t \, dt$

$du = 2t \, dt \qquad v = e^t$

$$I_1 = t^2 e^t - \int e^t \cdot 2t \, dt$$

$$= t^2 e^t - 2 \underbrace{\int t e^t \, dt}_{I_2}$$

Calculamos I_2:

$$I_2 = \int t e^t dt$$

$$u = t \qquad dv = e^t dt$$

$$du = dt \qquad v = e^t$$

$$I_2 = te^t - \int e^t dt$$

$$= te^t - e^t + C$$

Reemplazando esto en I_1

$$I_1 = t^2e^t - 2I_2$$
$$= t^2e^t - 2\left(te^t - e^t + C\right)$$
$$= t^2e^t - 2te^t - 2e^t + C_2$$

Esta es mi integral.

Ej: $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = I_1$

$u = e^x$ $\qquad$ $dv = \operatorname{sen} x \, dx$

$du = e^x \, dx$ $\qquad$ $v = -\cos x$

$$I_1 = e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, e^x \, dx$$

$$= -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int e^x \cos x \, dx$$

$u = e^x$ $\qquad$ $dv = \cos x \, dx$

$du = e^x \, dx$ $\qquad$ $v = \operatorname{sen} x$

$$I_2 = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, e^x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - I_1$$

Reemplazamos I_2 en la ecuación para I_1

$$I_1 = -e^x \cos x + I_2$$
$$= -e^x \cos x + (e^x \operatorname{sen} x - I_1)$$
$$I_1 = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I_1$$
$$2I_1 = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$$
$$I_1 = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Hemos hablado de integrales indefinidas. Qué pasa con las integrales definidas??

Lo mismo es válido:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

Ej:

$$\int_0^1 \arctan x\,dx$$

$u = \arctan x$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx$ $\qquad v = x$

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = (\arctan x)\cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \arctan(1)\cdot 1 - \arctan(0)\cdot 0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$u = 1+x^2$$

$$du = 2x\,dx$$

$$\frac{du}{2} = x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u}$$

límites:

$x = 0 \rightsquigarrow u = 1$

$x = 1 \rightsquigarrow u = 2$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln u\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Volviendo a la integral original:

$$I_1 = \frac{\pi}{4} - I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Ej: $\int x \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$= (\ln x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= (\ln x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= (\ln x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C$$

$$= (\ln x) \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$