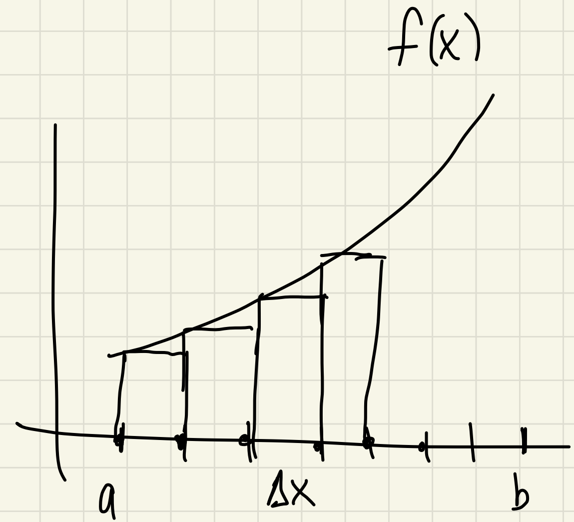
Clase 12:

Pregunta 2 solemne práctica:

¿A cuál(es) de las siguientes integrales corresponde el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\frac{4}{n} + \frac{4i}{n^2}\right]$?

$$4 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}\right]$$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$[a, a+\Delta x]$, $[a+\Delta x, a+2\Delta x]$, ... $[a+(n-1)\Delta x, b]$

Altura: $f(a)$ $\quad f(a+\Delta x)$ ... $+ f(a+i\Delta x) + \dots + f(a+(n-1)\Delta x)$

$$\sum \text{Alturas} \cdot \underbrace{\text{anchos}}_{\Delta x} = \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\cdot \Delta x$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\cdot \frac{(b-a)}{n}$$

alternativa 1) $\int_1^3 (x+1)\,dx$

$a = 1$, $b = 3$

$f(x) = x+1$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$f(\underbrace{a + i\Delta x}_{}) = (a + i\Delta x) + 1$$

$$= 1 + i \cdot \frac{2}{n} + 1 = 2 + \frac{2i}{n}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x) \cdot \frac{(b-a)}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(2 + 2\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= 4 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}\right)$$

Ojo: esto da con los extremos. Con los derechos da

$$4\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2}\right)$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

Fórmula: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\Delta x$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

Otra alternativa) $\displaystyle\int_0^1 (4+4x)\,dx$

$a=0$, $b=1$

$f(x)=4+4x$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

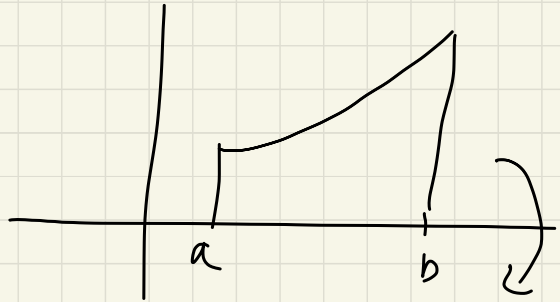
$$f(a+i\Delta x) = 4 + 4(a+i\Delta x) = 4+4(0+i/n)$$

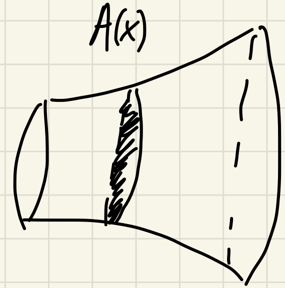
$$= 4 + 4i/n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} (4+4i/n)\cdot \frac{1}{n}$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}\right)$$

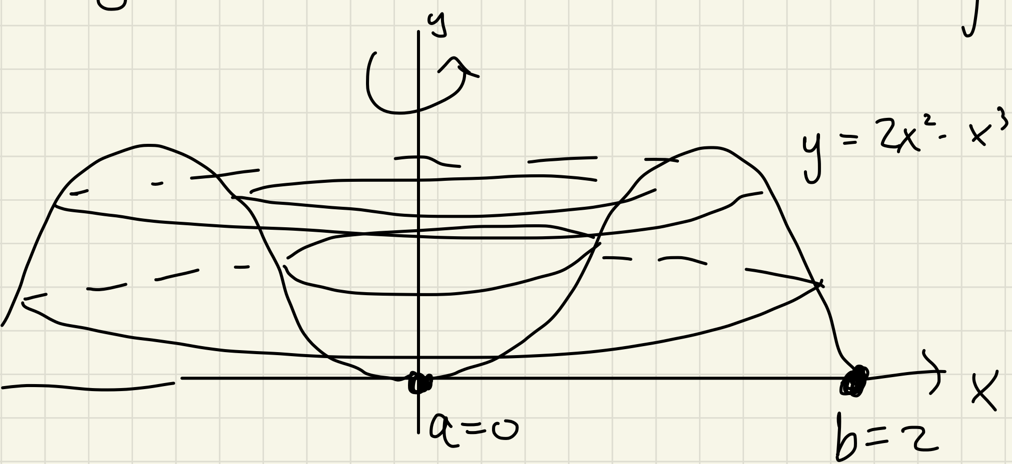
Sólidos de revolución:

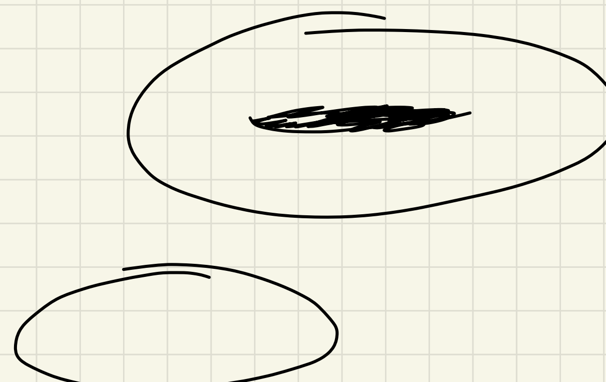


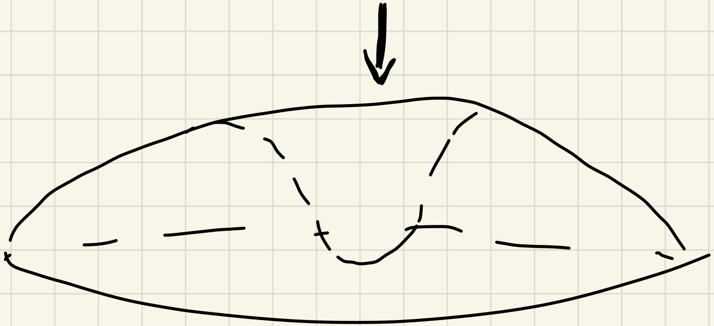


$$\text{Vol} = \int_a^b A(x)\,dx$$

Ej: Supongamos que rotamos el área bajo la curva $y = 2x^2 - x^3$ en torno al eje y:



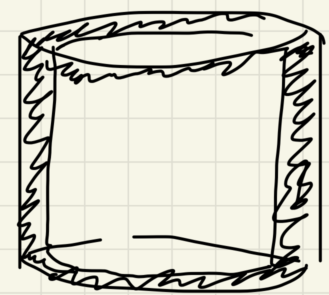


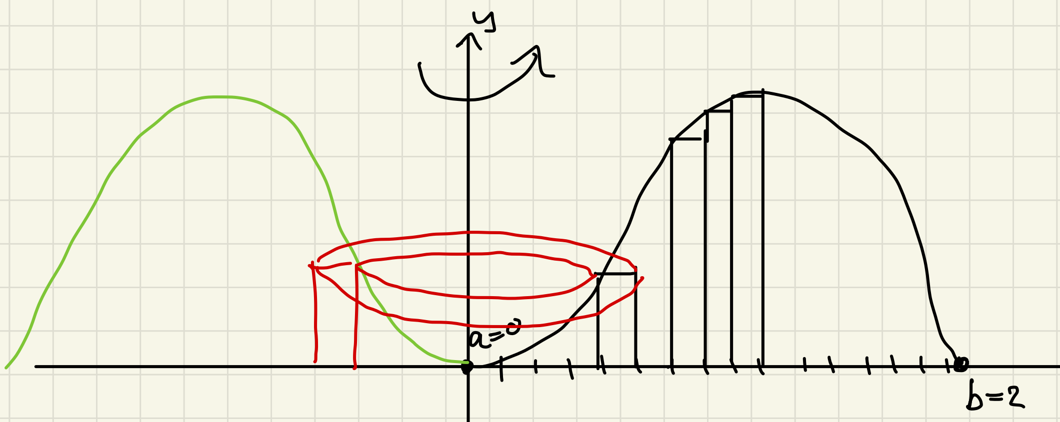


Es dificil hacerlo con secciones tranversales

Vamos a ver otro método para calcular volúmenes:

Cascarones cilíndricos:

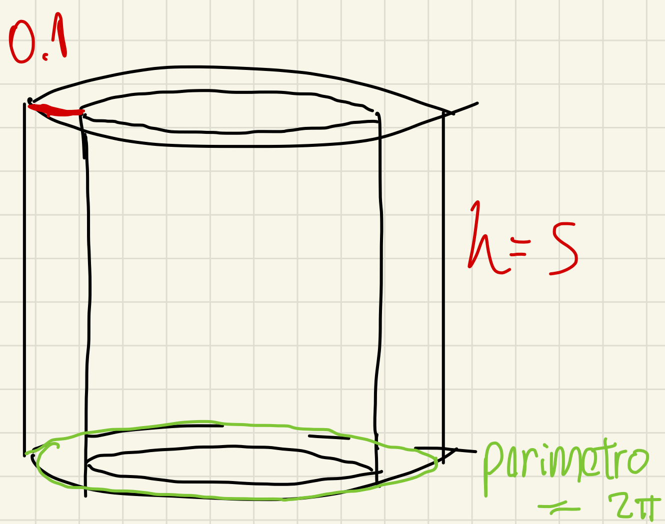




Detalles de esta contrucción:

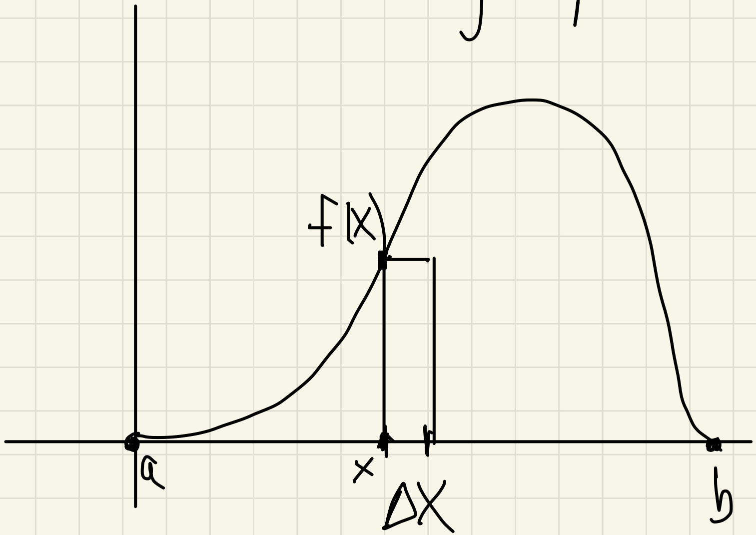
Cascarón cilíndrico tiene volumen igua a:

altura · circunferencia · ancho
"grosor"
del cascarón



$$Vol = 5 \cdot 0.1 \cdot 2\pi$$

En nuestro ejemplo:



Altura = $f(x)$

grosor = Δx

circunf = $2\pi \cdot x$

$$\text{Vol aprox} = \sum f(x) \cdot 2\pi x \, \Delta x$$

$$\text{Vol exacto} = \int_a^b f(x) \cdot 2\pi x \, dx$$

En nuestro ejemplo:

$a = 0$

$b = 2$

$f(x) = 2x^2 - x^3$

$$\text{vol} = \int_0^2 (2x^2 - x^3) \cdot 2\pi x \, dx$$

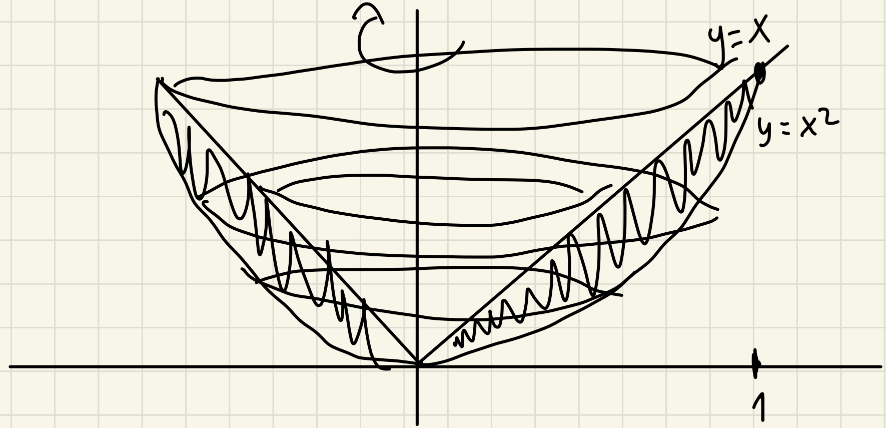
$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 x \, dx$$

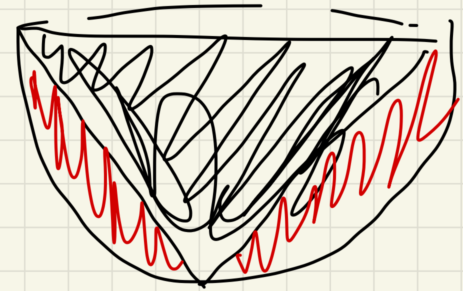
$$= 2\pi \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

$$= 2\pi \left(\frac{2^4}{2} - \frac{2^5}{5} \right) = \frac{16}{5}\pi$$

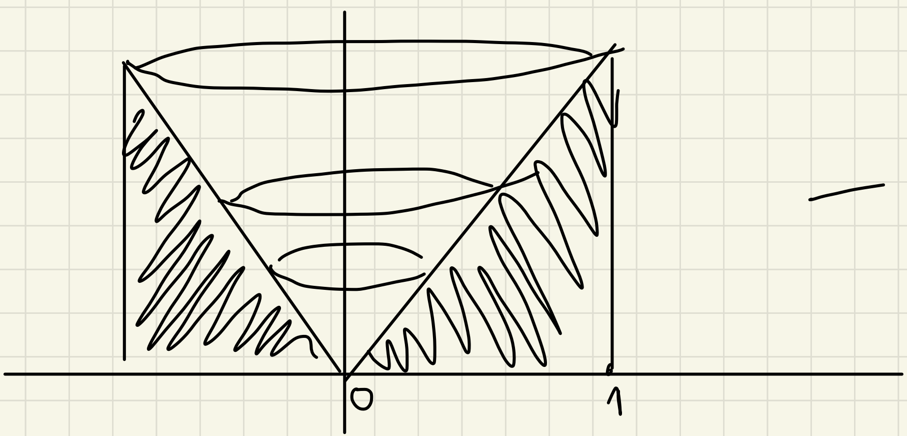
Volumen por cascarones cil. (cuando se rota en torno al eje y) $= \int_a^b f(x)\, 2\pi x\, dx$

Ej: 2 encuentre el vol del sólido obtenido al rotar en torno al eje y la región entre $y = x$ e $y = x^2$

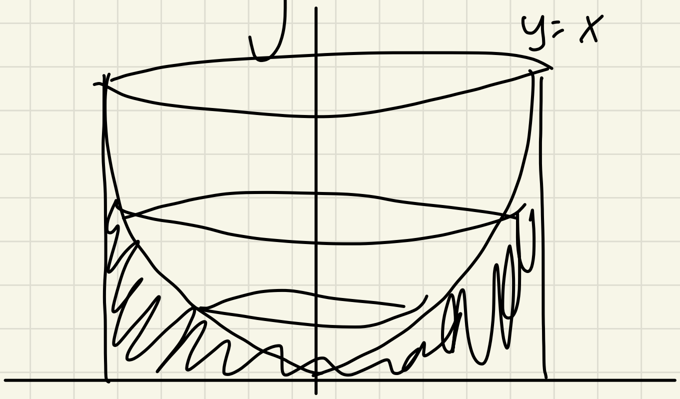




Podemos sacar el vol de la siguiente forma



$-$



$$\|$$

$$\int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)}}{x} \cdot 2\pi x \cdot dx \quad - \quad \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)}}{x^2} \cdot 2\pi x \, dx$$

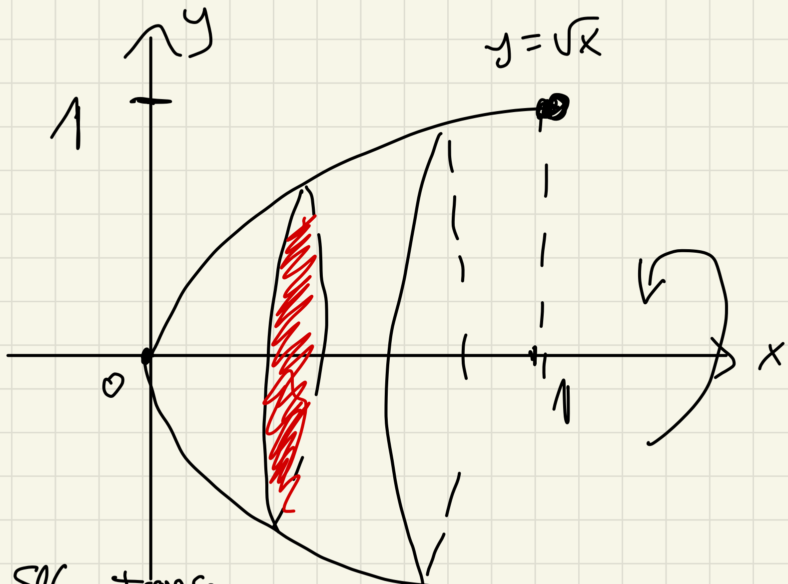
$$= 2\pi \int_0^1 x^2 \, dx - 2\pi \int_0^1 x^3 \, dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

Qué pasa si rotamos en torno al eje x?

Intercambiar roles de x e y.

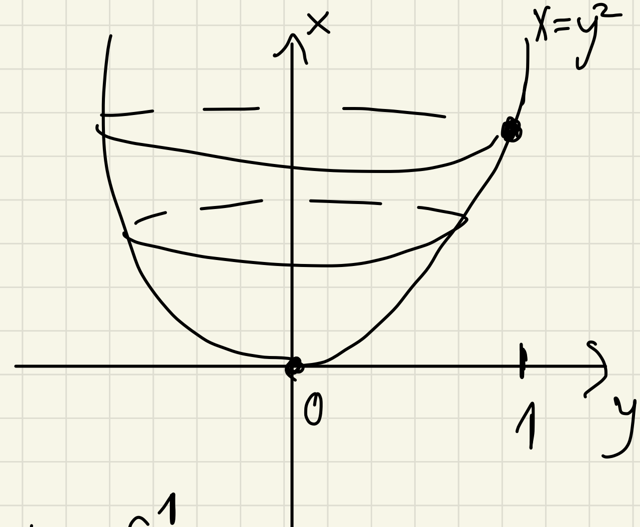
Ej: Encuentre el volumen obtenido al rotar en torno al eje x la curva $y=\sqrt{x}$, entre 0 y 1.



Por sec. transv.

$$Vol = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2\,dx$$

Por cascarones



$$Vol = \int_0^1 f(y)\cdot 2\pi y\,dy$$

$$= \int_0^1 \pi x \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x \, dx$$

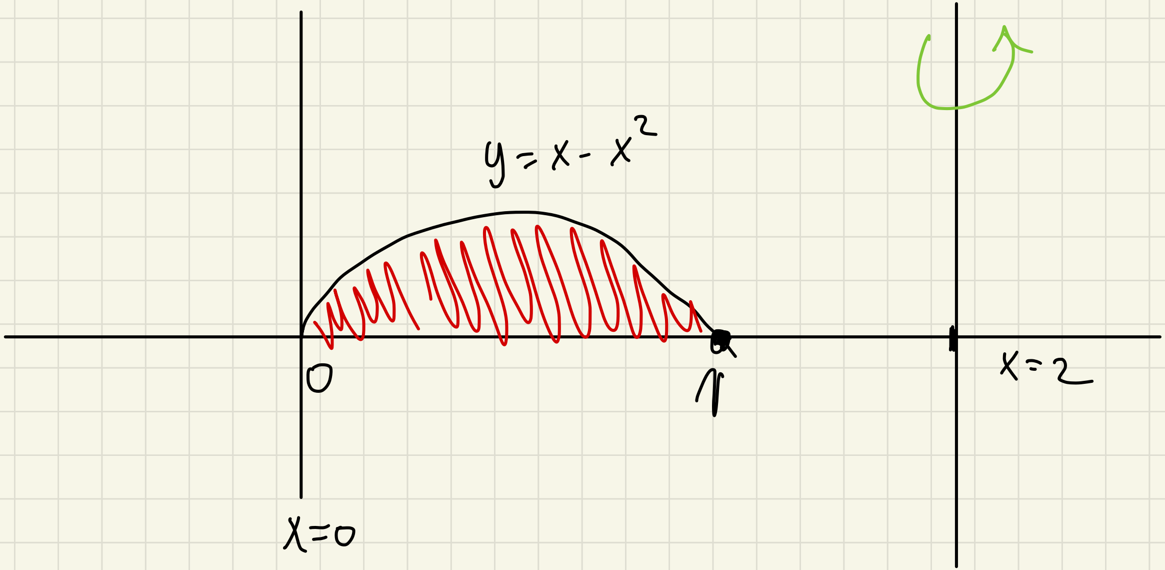
$$= \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^1 y^2 \cdot 2\pi \cdot y \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y^3 \, dy = 2\pi \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

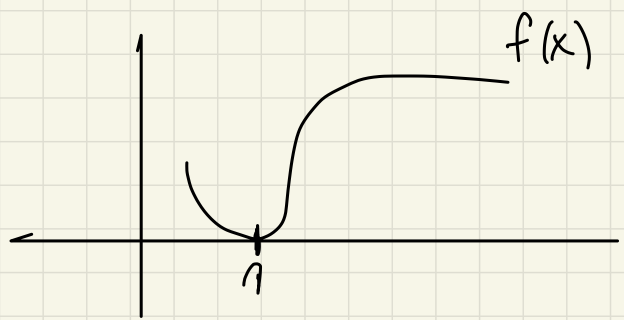
Ej: encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar la región acotada por $y = x - x^2$ e $y = 0$, en torno a la línea $x=2$



Recordemos traslaciones de funciones:

Si tengo

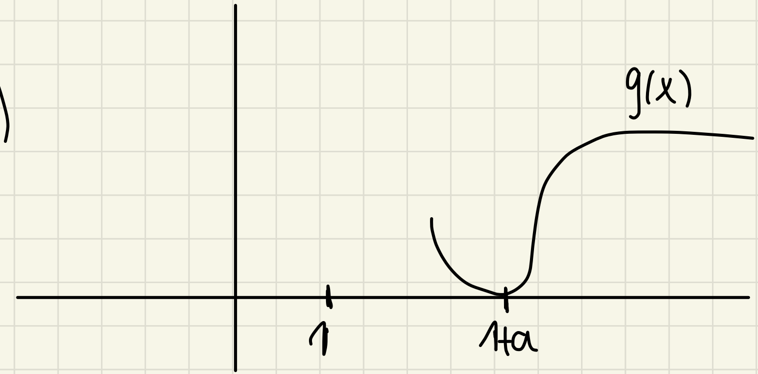
$f(x)$



$f(1) = 0$

trasladamos f en a hacia la derecha tomando, $a > 0$

$g(x) = f(x - a)$

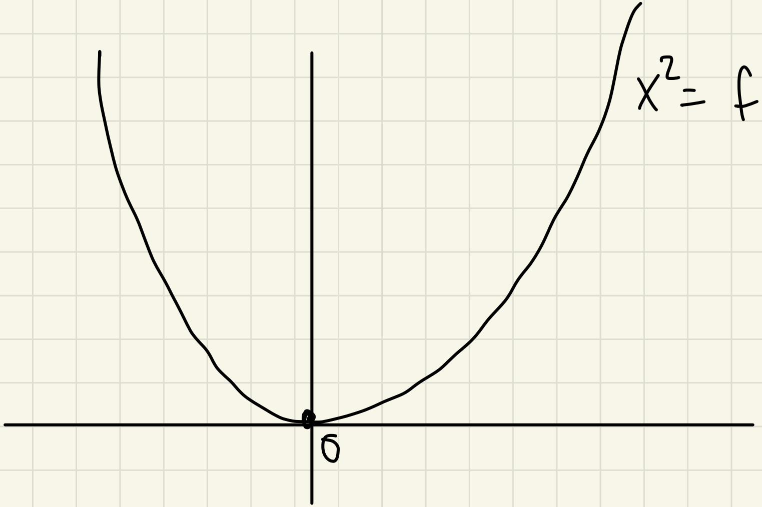


$f(1) = 0 \Rightarrow g(??) = 0$

$g(1+a) = f(1+a-a) = f(1) = 0$

Ej: $f(x) = x^2$

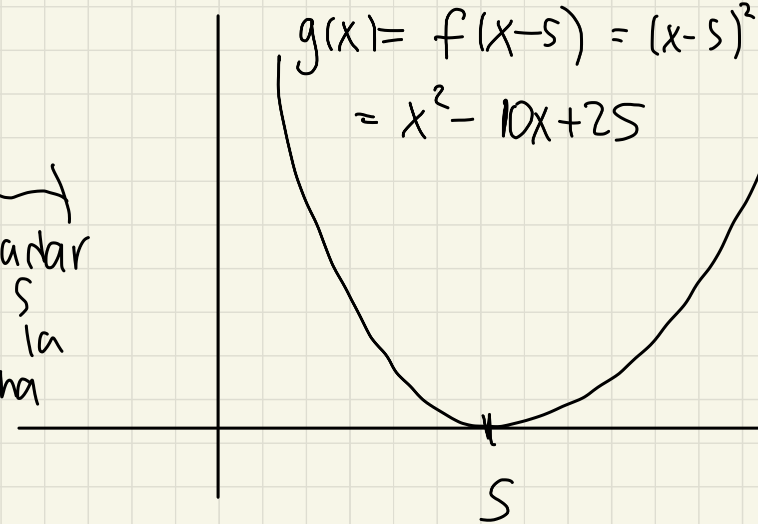
$x^2 = f(x)$



trasladar en 5 hacia la derecha

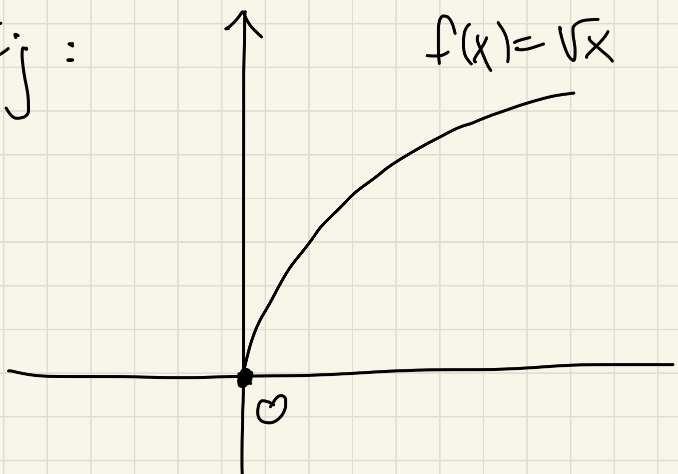
$g(x) = f(x-5) = (x-5)^2$

$= x^2 - 10x + 25$



Ej :

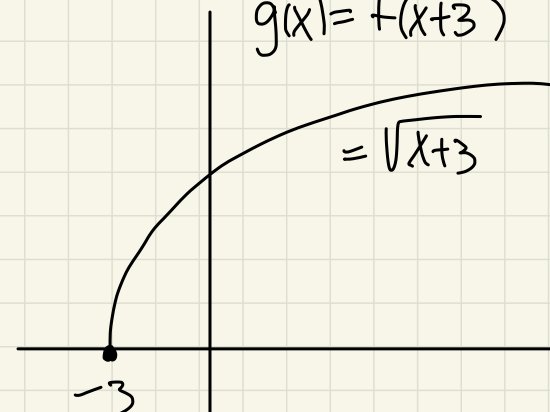
$f(x) = \sqrt{x}$



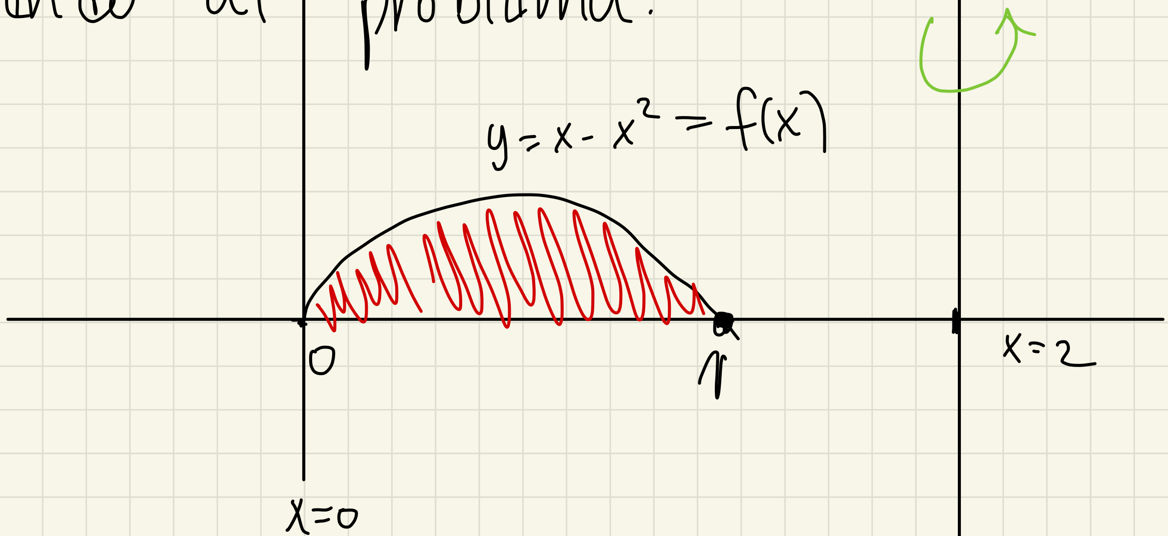
trasladar en 3 hacia la izq

$g(x) = f(x+3)$

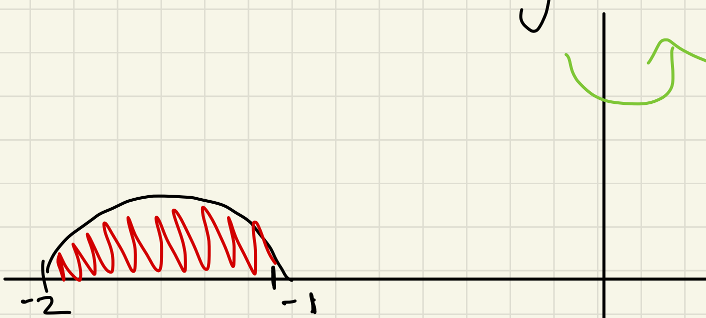
$= \sqrt{x+3}$



Volviendo al problema:



trasladamos la figura en dos hacia la izq



$$g(x) = f(x+2)$$
$$= (x+2) - (x+2)^2$$
$$= x + 2 - x^2 - 4x - 4$$

$$= -3x - 2 - x^2$$

Uno ahora puede llegar y usar cascarones.