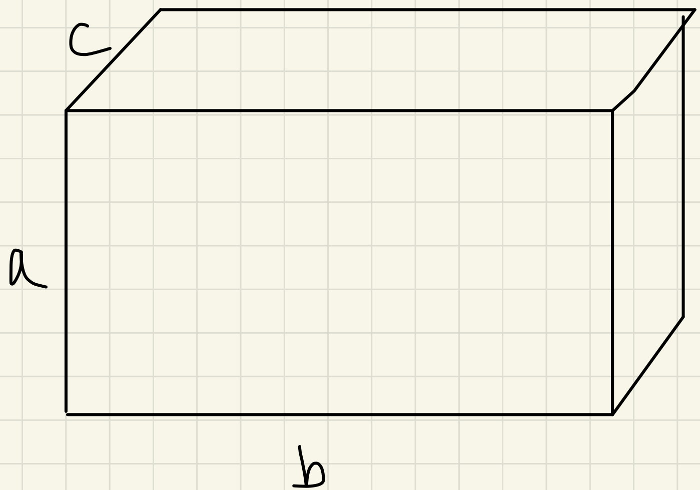
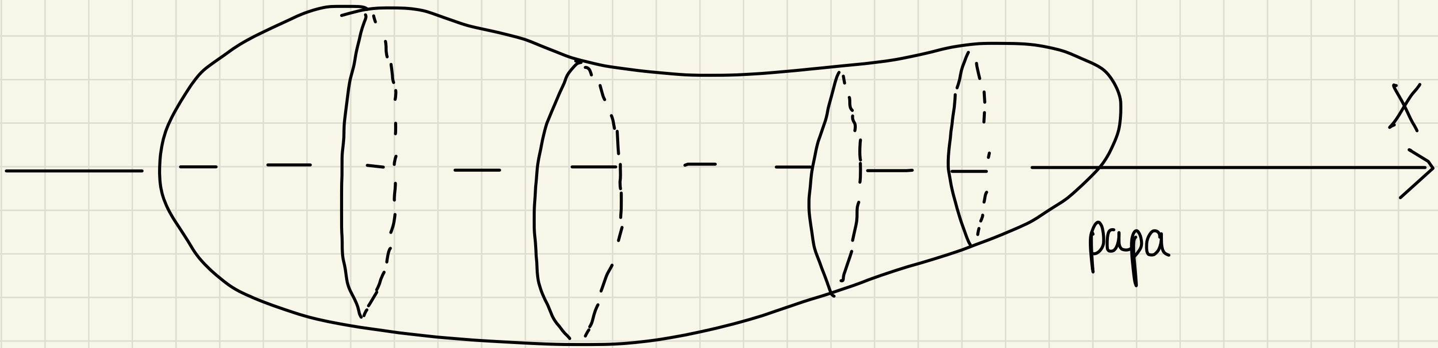
Clase 10: volúmenes

Algunas ideas:

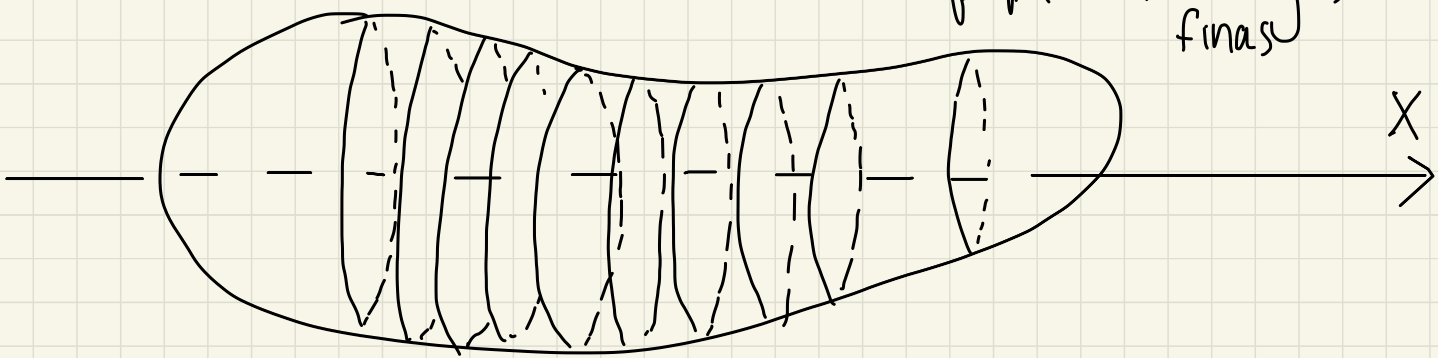


$$\mathrm{Vol}(\text{caja}) = a \cdot b \cdot c$$

Cómo calculamos volumen de figuras más exóticas??

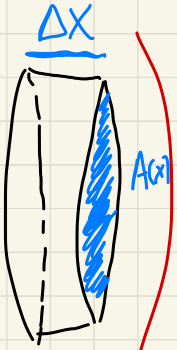


cortamos la papa en rodajas muy finas

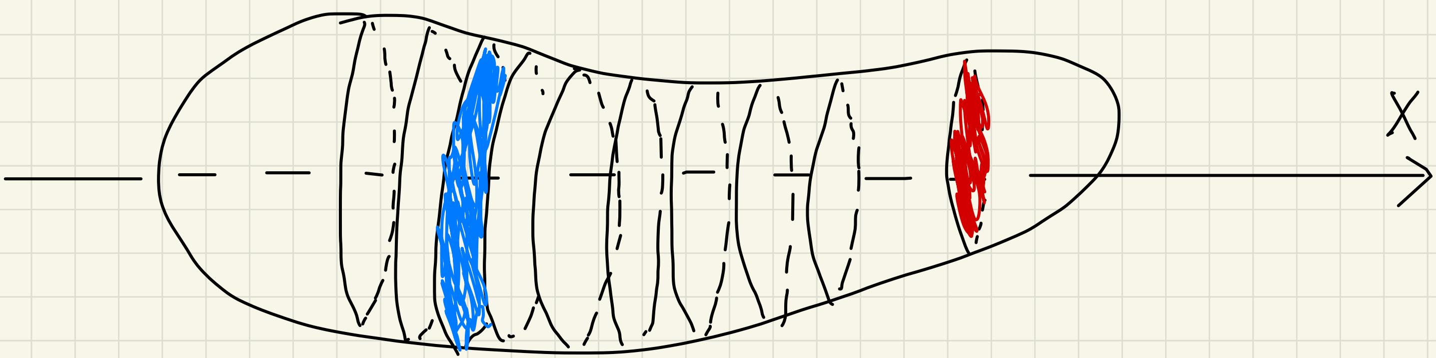


Calculamos el volumen de cada rodaja:

Esto es casi un cilindro

vol() $\approx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{área de} \\ \text{la base}}}{A(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altura}}}{\Delta x}$

Area de la base cambia de rodaja a rodaja.



Pensamos el área de la base de c/ rodaja como

Una función de x : $A(x)$

El volumen total de la papa es

$$\text{Vol(papa)} \approx \sum_{\text{rodajas}}' A(x)\Delta x$$

$$= \sum_{\text{partición}}' \text{alto} \cdot \text{ancho}$$

Al hacer más fina la partición, obtenemos una integral:

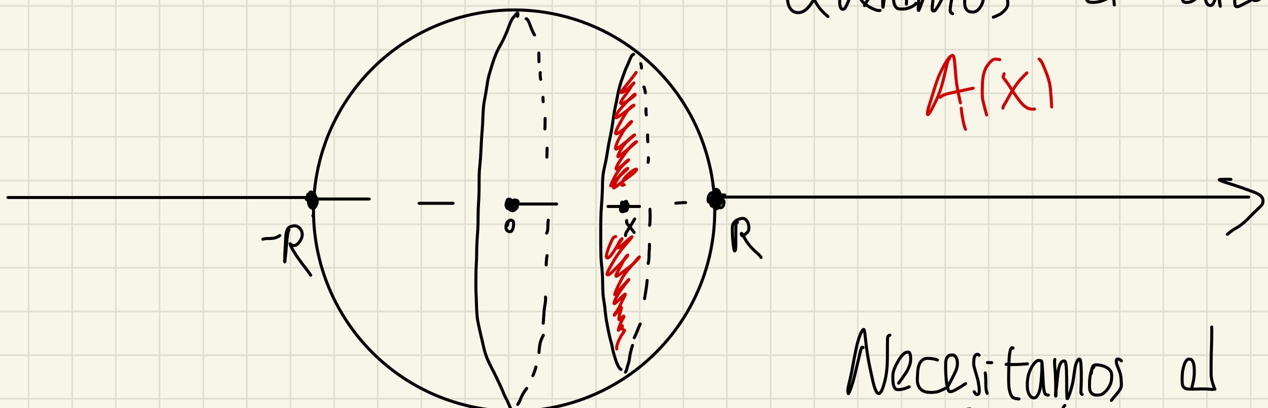
$$\sum' A(x)\Delta x \rightsquigarrow \int A(x)\,dx$$

Ej: Calcule el volumen de una esfera de radio R

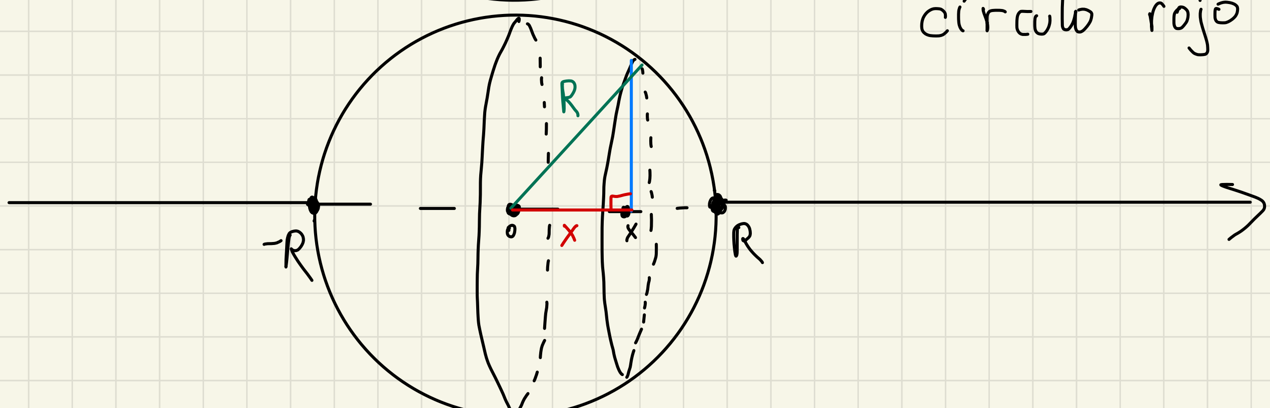
Sol:

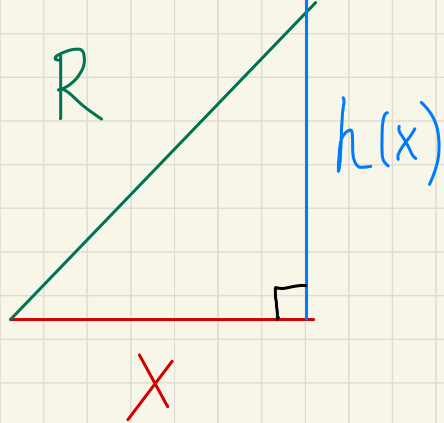
Queremos el área roja:

$A(x)$



Necesitamos el radio del círculo rojo





h(x) es el radio del círculo rojo

$$x^2 + h(x)^2 = R^2$$

$$h(x)^2 = R^2 - x^2$$

$$\text{Área círculo rojo} = A(x) = \pi h(x)^2 = \pi (R^2 - x^2)$$

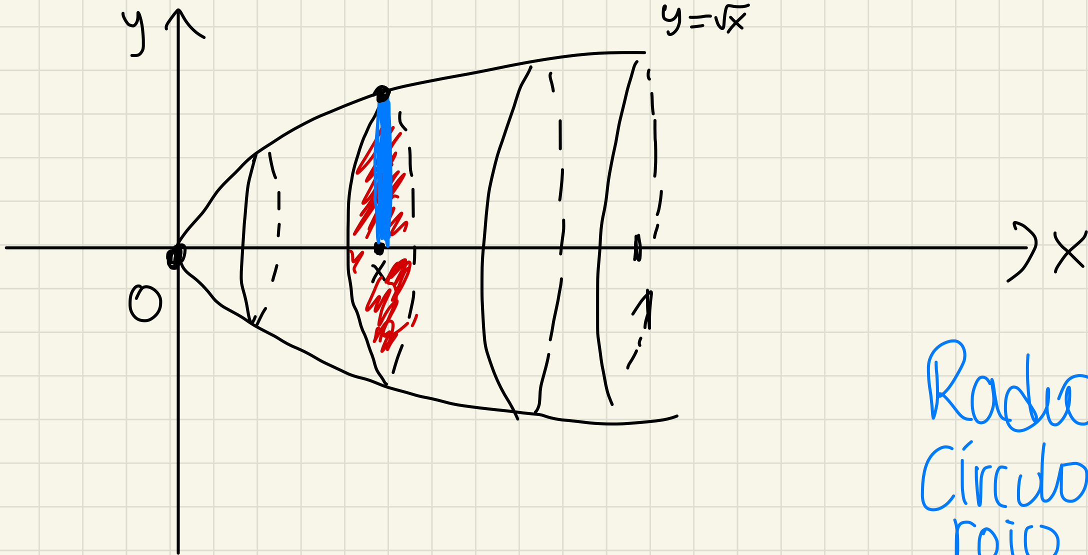
$$\text{Volumen} = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi\left(\int_{-R}^{R} R^2\,dx - \int_{-R}^{R} x^2\,dx\right) = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}$$

$$= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right) = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{R^3 \cdot 2}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Ej: considere el sólido generado al girar la curva $y = \sqrt{x}$ en torno al eje x, entre 0 y 1. Calcule su volumen.



Queremos el área del círculo rojo como función de x

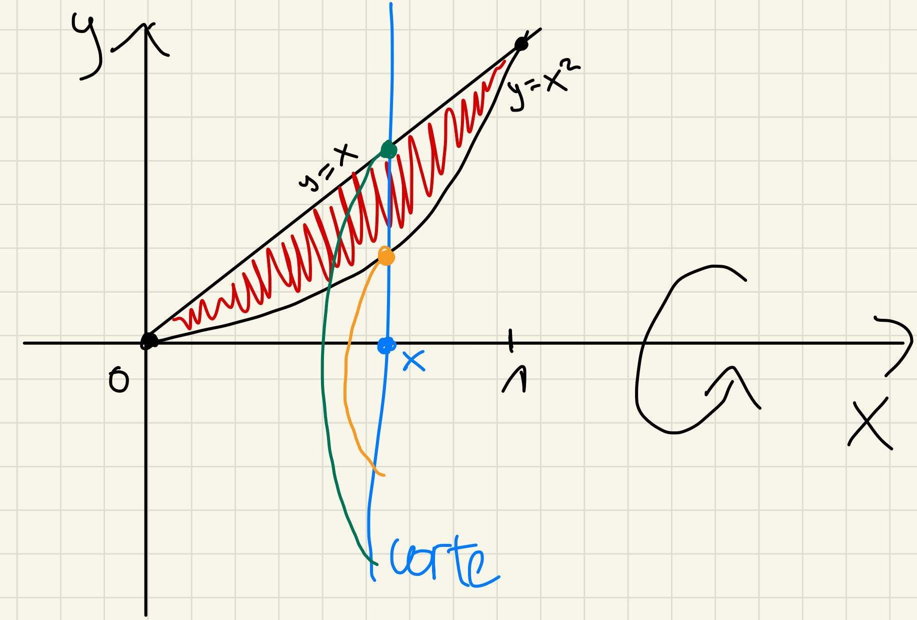
Radio círculo rojo $= h(x) = \sqrt{x}$

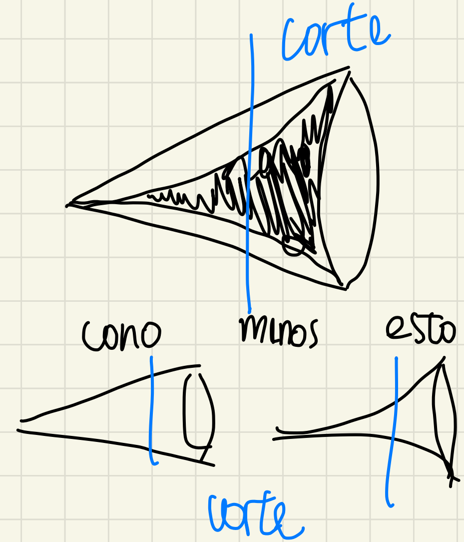
Área círculo rojo $= \pi h^2(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$

$$\text{Volumen} = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \int_0^1 x\,dx$$

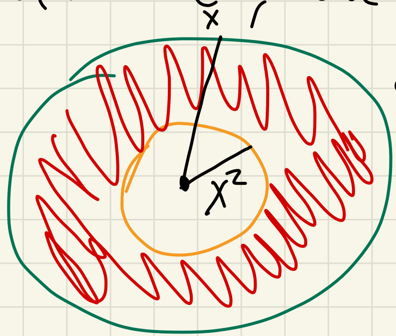
$$= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Ej: Considere el sólido generado al rotar c/r al eje x la región encerrada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$. Calcule el volumen de ese sólido.





Transversalmente, al cortar la figura se ve así



necesitamos esa área roja

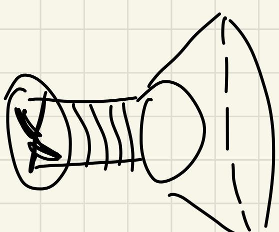
$\Downarrow$

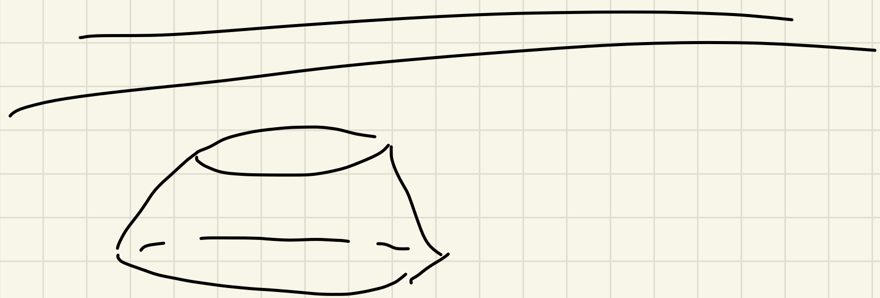
necesitamos los radios de eso círculos

Área roja $= A(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{área circ} \\ \text{grande}}}{\pi x^2} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{area circ} \\ \text{chico}}}{\pi (x^2)^2} = \pi x^2 - \pi x^4$

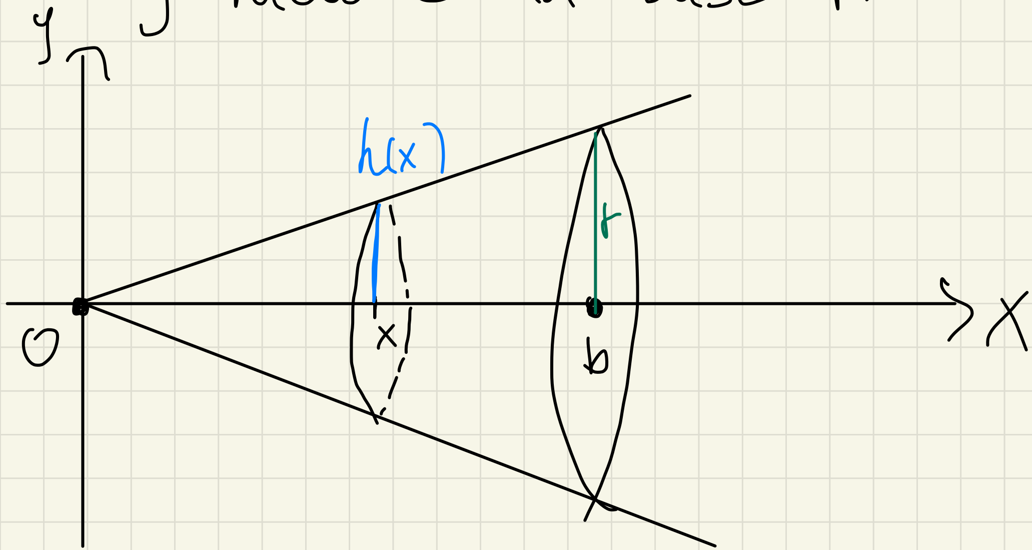
$$\text{Vol} = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x^2 - \pi x^4\,dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$$



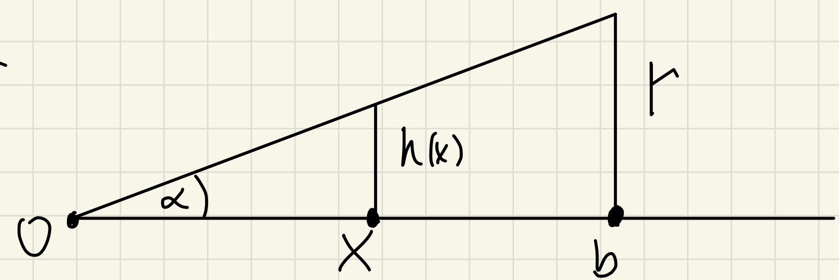


Ej: Calcule el volumen de un cono de altura b y radio de la base r.



$h(x)$ = radio de la sección transversal

$$\tan\alpha = \frac{h(x)}{x} = \frac{r}{b}$$



$$h(x) = \frac{xr}{b} \xRightarrow{\text{área sección transv}} A(x) = \pi h^2(x)$$

$$= \pi \left(\frac{xr}{b}\right)^2$$

$$= \pi x^2 \frac{r^2}{b^2}$$

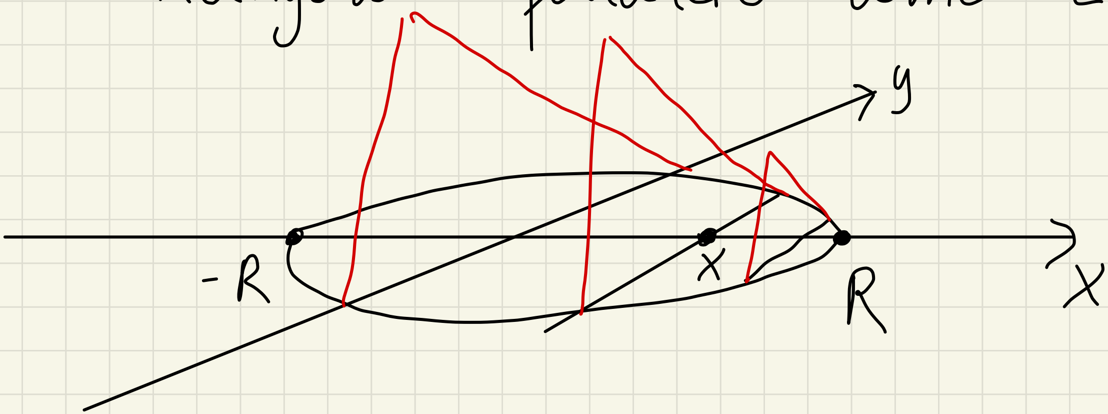
$$\text{Vol} = \int_0^b A(x)\,dx = \int_0^b \pi \frac{x^2 r^2}{b^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{b^2} \int_0^b x^2\,dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{b^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^b = \frac{\pi r^2 b^3}{b^2 \cdot 3} = \frac{\pi r^2 b}{3}$$

Ej: encuentre el volumen de una pirámide de altura H y base cuadrada de ancho ℓ.

$(\mathrm{vol} = \ell^2 H/3)$

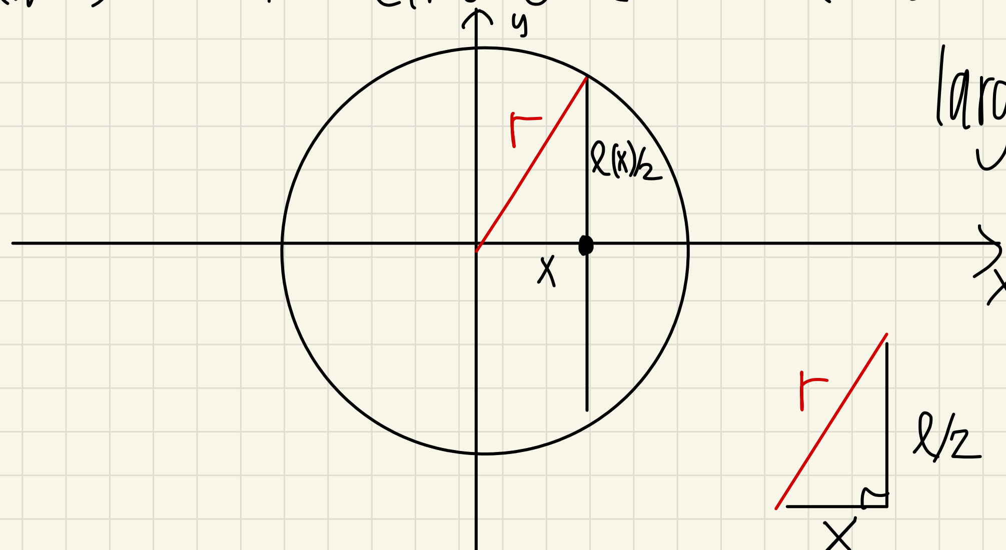
Ej: sobre un círculo, en cada punto, dibuje un triángulo equilátero como en la figura



Esto genera un sólido. Calcule su volumen.

Sol: las secciones transversales son Δ's equiláteros.
Necesitamos sacar su lado.

Si miramos el círculo desde arriba:



largo de ese segmento $= \ell(x)$

$$r^2 = x^2 + (\ell/2)^2 = x^2 + \ell^2/4$$

$$\ell^2 = 4r^2 - 4x^2$$

Área Δ equilátero de lado ℓ:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4(r^2 - x^2)$$

$$= 2\sqrt{3}(r^2 - x^2)$$

Luego $\text{Vol} = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx \ldots = \text{tarea}.$

Solemnes:

1: M 16 Sept → Sumas de Riemann, integral definidas, TFC, técnicas cálculo de áreas.

2: V 16 Oct

3: V 20 Nov