Cálculo 2 : cálculo integral

Correo : fel.prz@gmail.com

Syllabus : página curso / ~~felperez@github.io~~

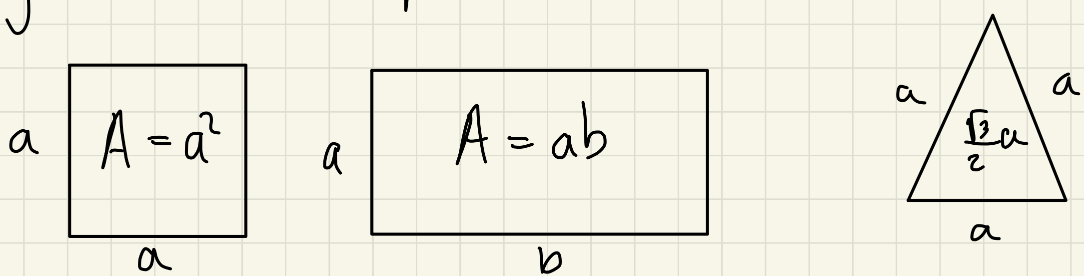
debería ser: felperez.github.io

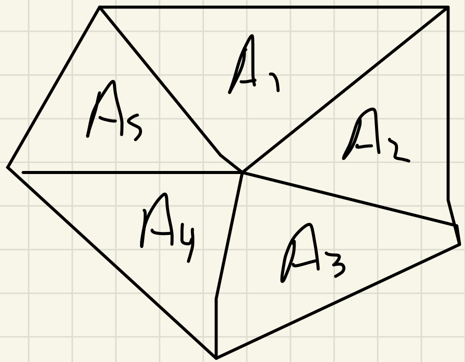
Notas/apuntes guardados en pdf.

Introducción:

Cálculo integral: dos aristas
- Problema del área
- Operación inversa a derivar

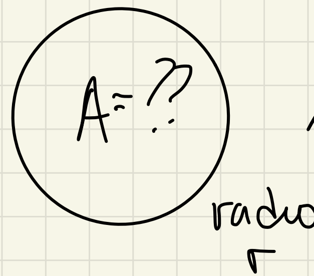
1. Problema del área: calcular área de figuras simples



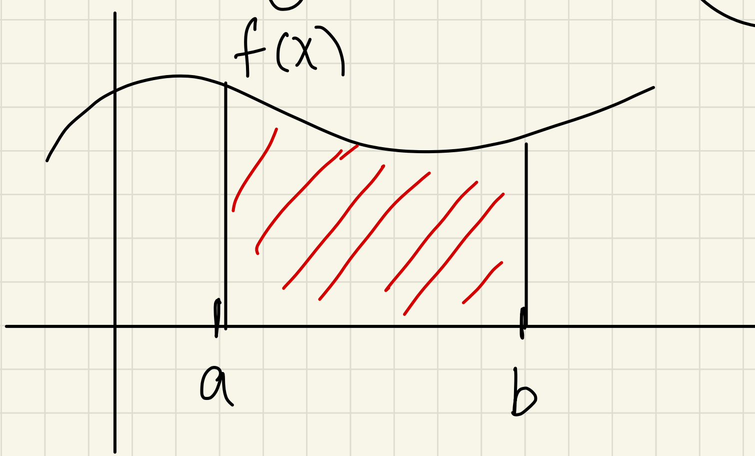


$$A = A_1 + \dots + A_5$$

Pregunta griega:



$$A = \pi r^2$$



Solución: cálculo integral

2. Operación inversa a derivar

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable (tiene derivada)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

derivada (recta tangente, razón de cambio, etc).

Pregunta: si conozco f', puedo conocer f??

Respuesta: cálculo integral

Repaso de sucesiones y sumatorias:

Una sucesión

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

Ej:

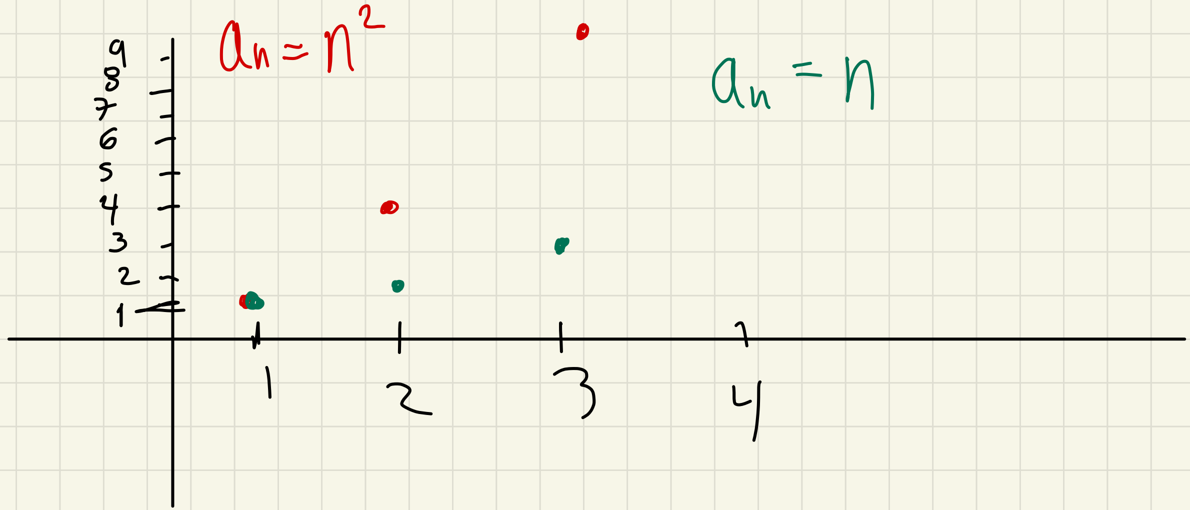
1. $a_n = n$, $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

2. $a_n = n^2$, $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

3. $a_n = 4n^2 + 3n - 1$, $6, 21, \ldots$

Etc

Gráfico



Algunas crecen indefinidamente

$a_n = n \quad , \quad a_n = n^2$

Otras no: $a_n = (-1)^n \quad , \; -1, 1, -1, 1, \ldots$

Otras se acercan a un número L tanto como queramos

$a_n = \frac{1}{n}$, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{1000000}, \dots$

n grande, $a_n \approx 0$

En este caso, decimos el límite de a_n es L,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Ejemplo: $a_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$

términos: $S-1,\ S+\frac{1}{2},\ S-\frac{1}{3},\ S+\frac{1}{4},\ \dots$

$S \pm$ algo cada vez más chico $\approx S$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S$$

$f(x) = 5^x$

$f'(x) \neq 5^x$

Límites conocidos:

1. $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Propiedades de $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

Euler

2. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = e \approx 2.7\dots$

3. $a_n = \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

4. $a_n = n^2/e^n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ || exponencial le gana a los polinomios

polinomio / e^n

5. $a_n = \dfrac{\tan(1/n)}{1/n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Otra cosa que podemos hacer con las sucesiones es sumarlas

$a_n = n$, $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

Las sumas de los términos son

$1 = 1$

$1+2=3$

$1+2+3=6$

$1+2+3+4=10$

$\vdots$

nos dan una nueva sucesion:

termina en es

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\dots+a_n$$

variable de suma

ojo con los nombres de los indices

$a_n = n$

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4 = 10$$

Pregunta: fórmula para $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$?? A veces, en gral no

Ej:

1. $a_n = n$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $a_n = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$r \in \mathbb{R}$, $r = 5$

3. $a_n = r^n$, $\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = 1 + r + \ldots + r^n$

$1, r, r^2, r^3, \ldots$

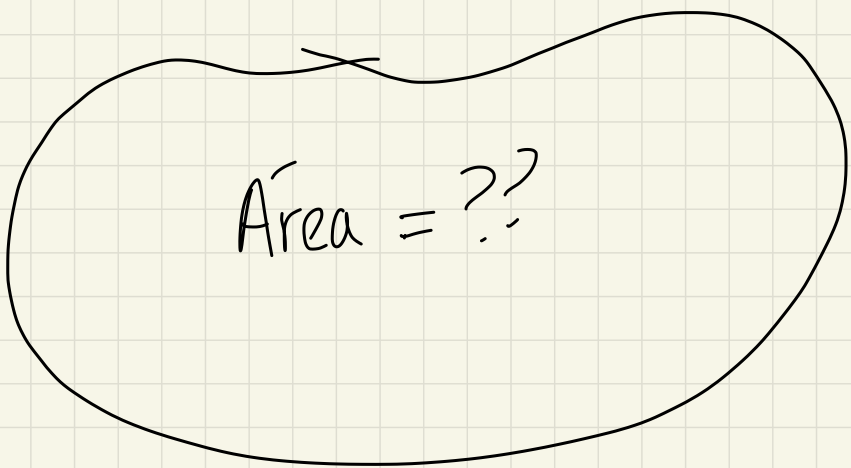
$1, 5, 25, 125, \ldots$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = ??$

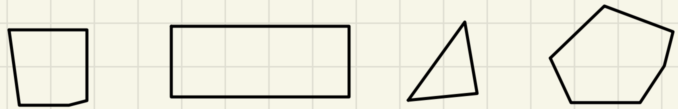
El problema del área

Pregunta griego: cómo definimos área??

% calculamos el área??

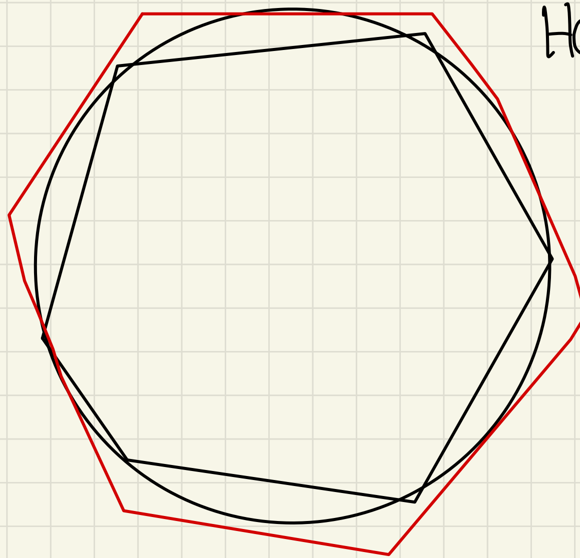


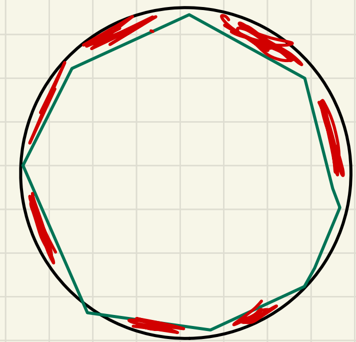
Respuesta: usar cosas que ya conocemos!!



$\text{Área}_{\text{Hex}} \leq \text{Área}_{\text{Circ}} \leq \text{Área}_{\text{Hex}}$

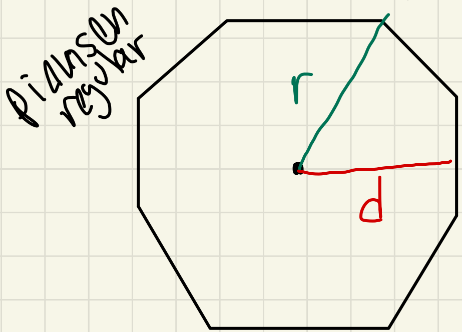
Idea:
aproximar
por afuera
y por dentro,
y hacer cada
vez mejor
nuestras aproximaciones





"polígonos con ∞'s lados" da el área exacta!!

Área de un polígono regular n lados



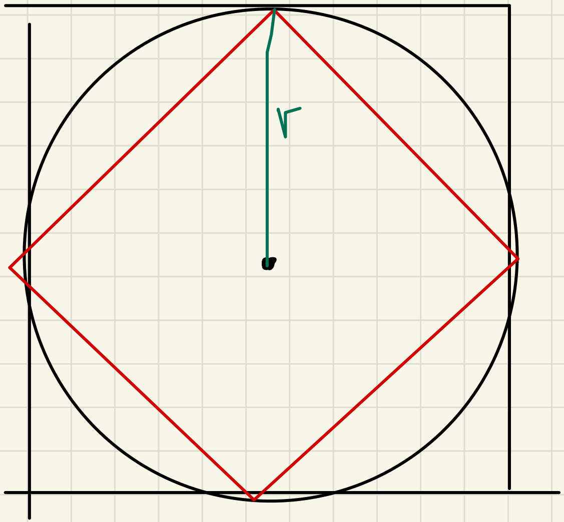
En términos de d

$$A = n d^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

(radianes, no grados)

En términos de r

$$A = \frac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$



area □ rojo (polígono n-lados) dentro círculo // area pol afuera del círcul

$$\frac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq A \text{ circ} \leq n r^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\pi r^2 \underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}}}_{\approx 1} \leq A \leq \pi r^2 \underbrace{\boxed{\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}}}_{\approx 1}$$

lim importantes

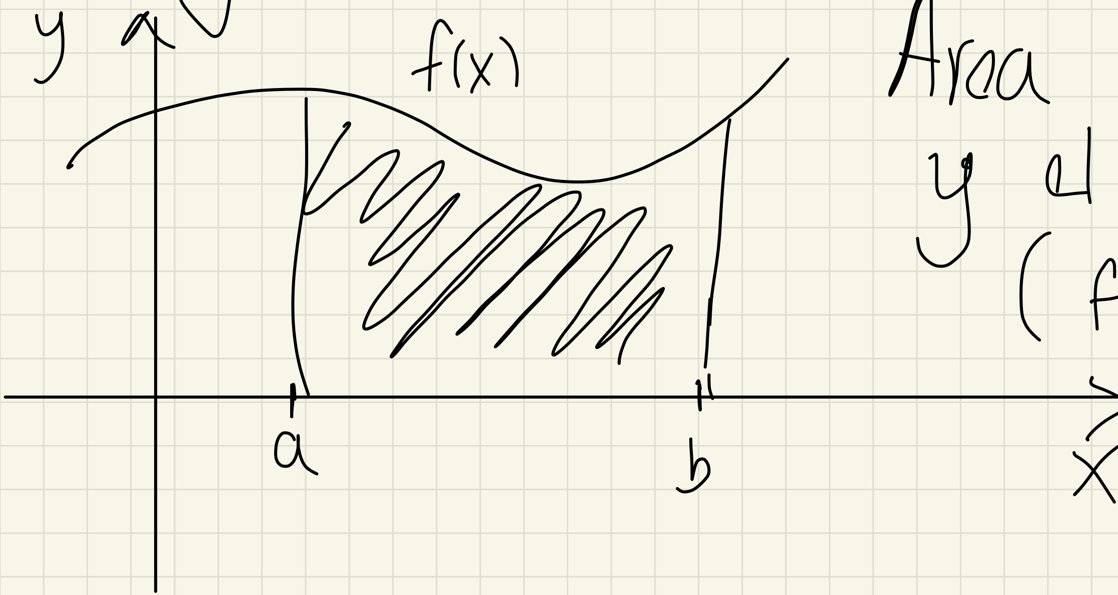
$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1 \quad // \quad \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$$

$$\pi r^2 \leq A \leq \pi r^2$$

$$A = \pi r^2$$

Esta es la idea del cálculo integral!

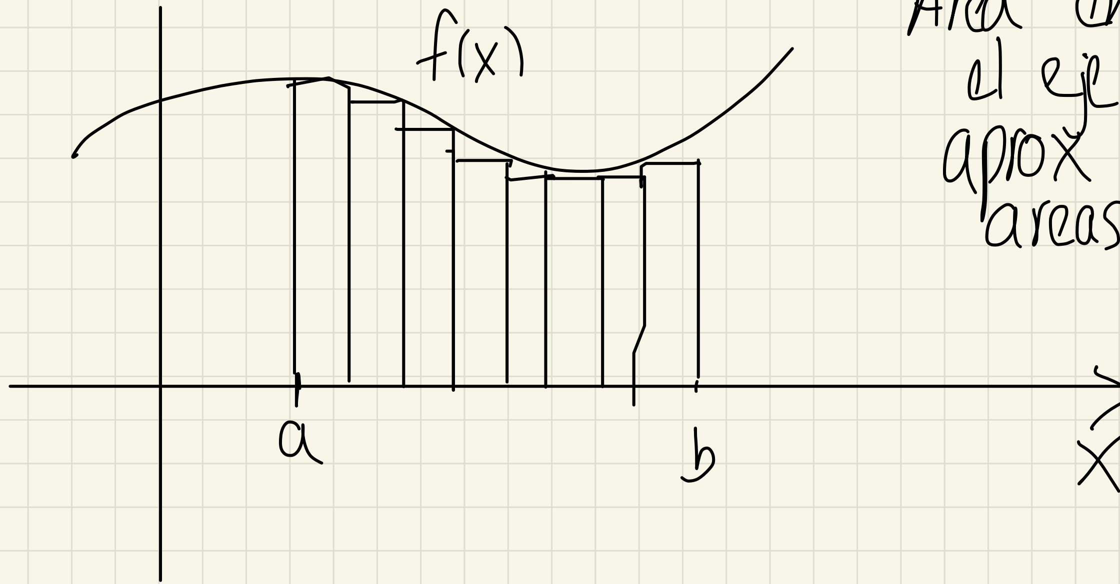
Esto fue muy particular, queremos una teoría general



Area entre f y el eje x ??

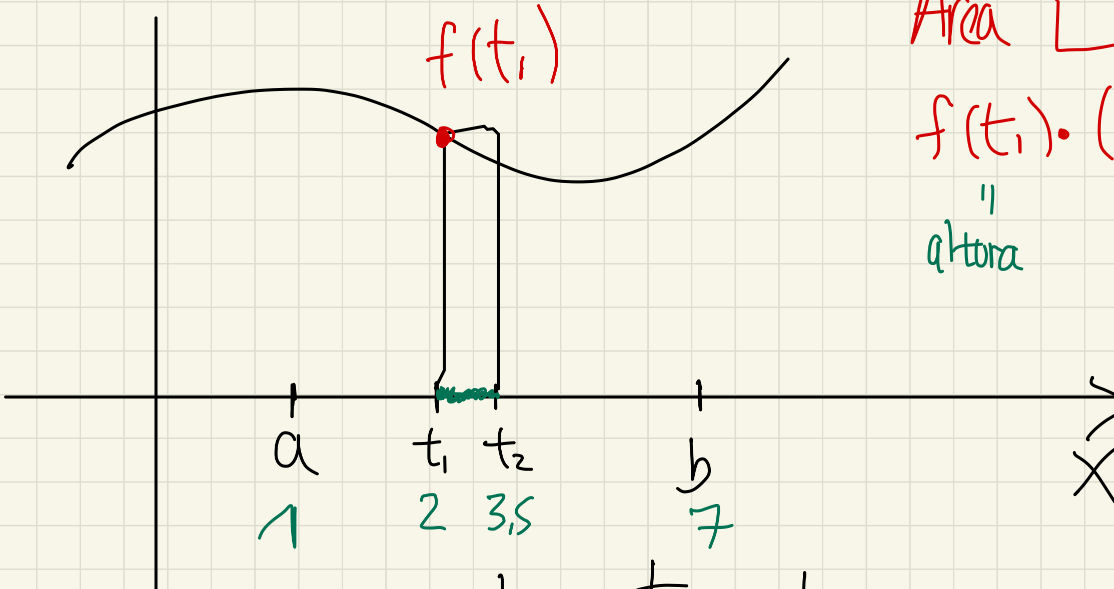
$(f \geq 0)$

Idea



Area entre f y el eje x es aprox suma areas $\square$'s

Pregunta es: cómo construimos los $\square$'s ??



Area $\square = f(t_1) \cdot (t_2 - t_1)$

$\underbrace{f(t_1)}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\text{ancho}}$

$$a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$$

$f(t_i^*) \to t_i^*$ cualquier punto de $[t_i, t_{i+1}]$

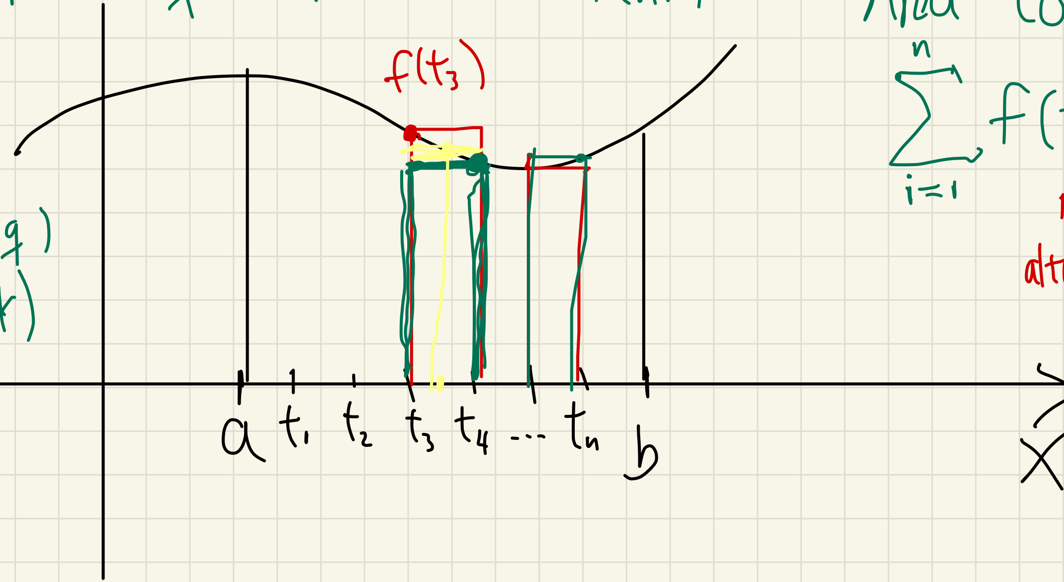
puede ser

t_i (extremo izq)

t_{i+1} (extremo der)

$\frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ (medio)

cualquiera !!



Área total aprox

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)$$

$f(t_i^*)$ = altura, $(t_{i+1} - t_i)$ = ancho

$$a \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq b$$

dividimos $[a, b]$ en intervalos más chicos $[t_i, t_{i+1}]$

Super importante: si f es bonita (continua) entonces la altura del $\square$ se puede tomar como cualquier punto del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, y cuando hagamos la aproximacion con muchos muchos $\square$'s, eso no va a importar!!